

# Microeconomia

## Lezione 3: Vincolo di Bilancio e Scelta Ottima

Marco Rosso

Università di Bologna

A.A. 2025–2026

20 febbraio 2026

## Cosa sappiamo finora

- **Preferenze del consumatore** → assiomi razionalità
- **Funzione di utilità**  $U(x, y)$  → rappresentazione numerica
- **Curve di indifferenza** → rappresentazione grafica
- **MRS** =  $MU_x/MU_y$  → trade-off soggettivo tra beni

**Domanda aperta:**

*Il consumatore sa cosa vuole, ma cosa può permettersi?*

### Vincolo di Bilancio

Oggi introduciamo il **vincolo di bilancio** (cosa può comprare) e scopriamo come trovare la **scelta ottima** che massimizza utilità dato il vincolo.

# Obiettivi della Lezione

Dopo questa lezione sarete in grado di:

1. **Scrivere e interpretare** il vincolo di bilancio
2. **Rappresentare graficamente** la retta di bilancio
3. **Analizzare** l'effetto di variazioni di prezzi e reddito
4. **Formulare** il problema di scelta ottima del consumatore
5. **Risolvere** il problema con metodo sostituzione e Lagrangiano
6. **Calcolare** la scelta ottima per funzioni Cobb-Douglas

## Focus della Lezione

Alla fine della lezione saprete trovare esattamente quale paniere  $(x^*, y^*)$  massimizza l'utilità del consumatore, dati prezzi e reddito.

# Il Problema Economico Fondamentale

## Situazione realistica:

- Consumatore ha preferenze (Lezione 2: curve di indifferenza)
- Vorrebbe consumare il più possibile di tutto
- **Ma**: ha risorse limitate (reddito finito)
- Deve pagare prezzi di mercato per i beni

## Quindi:

1. Quali panieri  $(x, y)$  può permettersi?  $\rightarrow$  *vincolo di bilancio*
2. Quale sceglierà tra quelli accessibili?  $\rightarrow$  *scelta ottima (massimizzazione utilità)*

# Vincolo di Bilancio: Definizione

## Dati:

- $p_x$  = prezzo unitario del bene  $x$  (€/unità)
- $p_y$  = prezzo unitario del bene  $y$  (€/unità)
- $M$  = reddito disponibile del consumatore (€)
- $(x, y)$  = quantità acquistate dei due beni

## Vincolo di Bilancio

La spesa totale non può superare il reddito:

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y \leq M$$

## Interpretazione:

- $p_x \cdot x$  = spesa per il bene  $x$
- $p_y \cdot y$  = spesa per il bene  $y$
- $p_x \cdot x + p_y \cdot y \leq M \rightarrow$  non posso spendere più di quanto ho

# Retta di Bilancio

## Retta di Bilancio (Budget Line)

Insieme di panieri che esauriscono esattamente il reddito:

$$p_x x + p_y y = M$$

**Forma esplicita** (risolvendo per  $y$ ):

$$y = \frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} x$$

**Componenti:**

- **Intercetta verticale:**  $y = M/p_y$  (quando  $x = 0$ )  
→ Quantità massima di  $y$  acquistabile se spendo tutto in  $y$
- **Intercetta orizzontale:**  $x = M/p_x$  (quando  $y = 0$ )  
→ Quantità massima di  $x$  acquistabile se spendo tutto in  $x$
- **Pendenza:**  $-p_x/p_y$  (coefficiente di  $x$ )  
→ Tasso al quale posso sostituire  $y$  con  $x$  nel mercato

## Esempio: Pizze e Birre

- $M = 60$  euro (reddito disponibile)
- $p_x = 10$  euro (prezzo pizza)
- $p_y = 3$  euro (prezzo birra)

**Vincolo di bilancio:**

$$10x + 3y = 60$$

**Forma esplicita:**

$$y = \frac{60}{3} - \frac{10}{3}x = 20 - \frac{10}{3}x$$

**Intercette:**

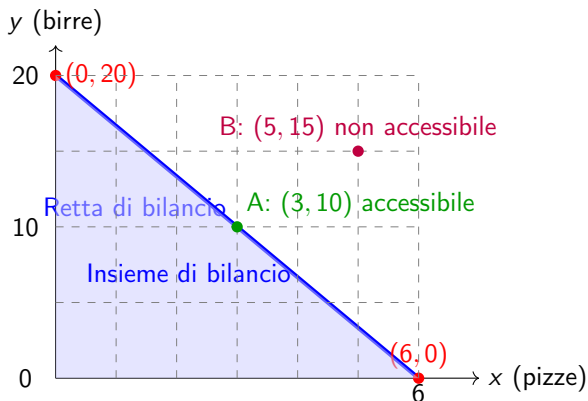
- Massimo pizze (se  $y = 0$ ):  $x = 60/10 = 6$  pizze
- Massimo birre (se  $x = 0$ ):  $y = 60/3 = 20$  birre

**Pendenza:**  $-10/3 \approx -3.33$

→ Per comprare 1 pizza in più, devo rinunciare a 3.33 birre

## Grafico: Retta di Bilancio

**Esempio:**  $10x + 3y = 60$



**Nota:** Asse  $y$  **compresso** per visualizzazione (coordinate economiche reali:  $y$  fino a 20 birre).

# Insieme di Bilancio (Budget Set)

## Definizione

L'**insieme di bilancio** è l'insieme di tutti i panieri accessibili (acquistabili):

$$B = \{(x, y) : p_x x + p_y y \leq M, x \geq 0, y \geq 0\}$$

## Componenti:

- **Frontiera:** Retta di bilancio ( $p_x x + p_y y = M$ )  
→ Panieri che esauriscono tutto il reddito
- **Interno:** Panieri sotto la retta ( $p_x x + p_y y < M$ )  
→ Panieri con spesa inferiore al reddito (risparmio positivo)
- **Vincoli di non negatività:**  $x \geq 0, y \geq 0$   
→ Non posso comprare quantità negative

**Forma geometrica:** Triangolo nel primo quadrante con vertici:

- Origine:  $(0, 0)$
- $(M/p_x, 0)$  sull'asse  $x$
- $(0, M/p_y)$  sull'asse  $y$

# Interpretazione della Pendenza

**Pendenza retta di bilancio:**  $-p_x/p_y$

## Tasso di Sostituzione di Mercato

La pendenza rappresenta il **trade-off oggettivo** imposto dal mercato: quante unità di  $y$  devo rinunciare per comprare 1 unità di  $x$ .

**Esempio:**  $-p_x/p_y = -10/3$

- Per comprare 1 pizza in più ( $\Delta x = +1$ ):
- Devo spendere 10€ in più
- Riducendo spesa in birre:  $10/3 \approx 3.33$  birre in meno
- Quindi:  $\Delta y = -10/3$  quando  $\Delta x = +1$

## Confronto con MRS:

- **MRS** = trade-off *soggettivo* (preferenze consumatore)
- $p_x/p_y$  = trade-off *oggettivo* (prezzi di mercato)
- **Ottimo:** quando i due coincidono! (vedremo dopo)

## Esempio: Tre Panieri

**Dati:**  $M = 60$ ,  $p_x = 10$ ,  $p_y = 3$

**Paniere A:** (3, 10)

- Spesa:  $10 \cdot 3 + 3 \cdot 10 = 30 + 30 = 60 \checkmark$
- Sulla retta di bilancio  $\rightarrow$  esaurisce reddito

**Paniere B:** (2, 8)

- Spesa:  $10 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 20 + 24 = 44 < 60 \checkmark$
- Interno all'insieme di bilancio  $\rightarrow$  risparmio €16

**Paniere C:** (5, 15)

- Spesa:  $10 \cdot 5 + 3 \cdot 15 = 50 + 45 = 95 > 60$
- Fuori dall'insieme di bilancio  $\rightarrow$  non accessibile

**Domanda:** Quale sceglierà il consumatore?

$\rightarrow$  Dipende dalle preferenze!

# Proprietà del Vincolo di Bilancio

## 1. Linearità

- La retta è sempre una linea retta (no curve)
- Pendenza costante  $-p_x/p_y$  ovunque
- Implicazione: tasso di sostituzione di mercato costante

## 2. Omogeneità di grado zero

- Se multiplico  $(p_x, p_y, M)$  per stessa costante  $\lambda > 0$ :  
 $\lambda p_x x + \lambda p_y y = \lambda M \rightarrow$  insieme di bilancio invariato
- Esempio: raddoppio tutti i prezzi e il reddito  $\rightarrow$  nessun cambiamento reale
- Implicazione: solo prezzi e reddito *relativi* contano

## 3. Convessità

- L'insieme di bilancio è convesso (forma triangolare)
- Media ponderata di due panieri accessibili è accessibile
- Implicazione: problema di ottimizzazione ben comportato

# Riepilogo Parte 1

## 1. Vincolo di Bilancio

- Equazione:  $p_x x + p_y y = M$
- Limita i panieri accessibili al consumatore

## 2. Retta di Bilancio

- Forma esplicita:  $y = M/p_y - (p_x/p_y)x$
- Intercette:  $(M/p_x, 0)$  e  $(0, M/p_y)$
- Pendenza:  $-p_x/p_y$  (trade-off di mercato)

## 3. Insieme di Bilancio

- Tutti i panieri con  $p_x x + p_y y \leq M$
- Forma triangolare nel primo quadrante

# Variazioni del Vincolo

**Situazione:** Abbiamo capito il vincolo di bilancio per dati  $(p_x, p_y, M)$ .

## Domande:

1. Cosa succede se il **reddito**  $M$  aumenta o diminuisce?
2. Cosa succede se un **prezzo**  $p_x$  o  $p_y$  aumenta o diminuisce?
3. Cosa succede con **inflazione proporzionale** (tutti i prezzi aumentano)?

## Obiettivo:

- Capire come si modifica graficamente la retta di bilancio
- Distinguere tra **spostamenti paralleli** e **rotazioni**
- Interpretare economicamente ogni cambiamento

## Aumento del Reddito

**Scenario:**  $M$  aumenta a  $M' > M$ , prezzi invariati.

**Nuova retta di bilancio:**

$$y = \frac{M'}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x$$

**Confronto con retta originale:**

- **Pendenza:**  $-p_x/p_y$  (invariata)
- **Intercetta verticale:**  $M'/p_y > M/p_y$  (aumenta)
- **Intercetta orizzontale:**  $M'/p_x > M/p_x$  (aumenta)

**Effetto grafico:** *Spostamento parallelo verso l'esterno*

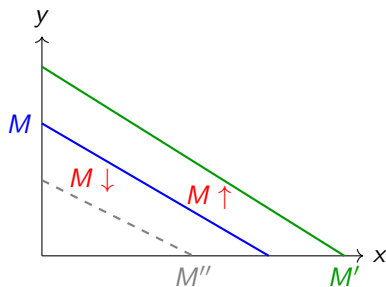
**Interpretazione economica:**

- Posso comprare più di entrambi i beni
- Insieme di bilancio si espande
- Trade-off di mercato ( $p_x/p_y$ ) resta lo stesso

## Diminuzione del Reddito

**Scenario:**  $M$  diminuisce a  $M'' < M$ , prezzi invariati.

**Effetto:** Spostamento parallelo verso l'interno



**Regola generale:**

- $M \uparrow \rightarrow$  retta si sposta verso l'esterno (parallelamente)
- $M \downarrow \rightarrow$  retta si sposta verso l'interno (parallelamente)
- Pendenza sempre invariata

## Aumento del Prezzo di $x$

**Scenario:**  $p_x$  aumenta a  $p'_x > p_x$ ,  $M$  e  $p_y$  invariati.

**Nuova retta:**

$$y = \frac{M}{p_y} - \frac{p'_x}{p_y}x$$

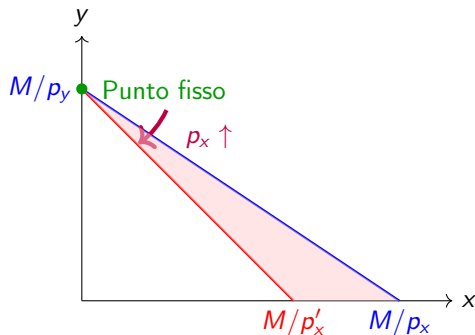
**Confronto:**

- **Intercetta verticale:**  $M/p_y$  (invariata)  
→ Se compro solo  $y$ ,  $p_x$  non importa
- **Intercetta orizzontale:**  $M/p'_x < M/p_x$  (diminuisce)  
→ Posso comprare meno  $x$
- **Pendenza:**  $-p'_x/p_y$  più ripida (in valore assoluto)  
→  $x$  è diventato relativamente più costoso

**Effetto grafico: Rotazione verso l'interno attorno all'intercetta verticale**

## Grafico: Variazione $p_x$

**Aumento  $p_x$ : Rotazione verso l'interno**



Intercetta verticale invariata  
Intercetta orizzontale diminuisce

**Interpretazione:**  $x$  più costoso  $\rightarrow$  posso comprare meno  $x$  (a parità di altri fattori)

## Diminuzione del Prezzo di $x$

**Scenario:**  $p_x$  diminuisce a  $p_x'' < p_x$ ,  $M$  e  $p_y$  invariati.

**Effetto:** Rotazione verso l'esterno attorno all'intercetta verticale

- Intercetta verticale: invariata
- Intercetta orizzontale:  $M/p_x'' > M/p_x$  (aumenta)
- Pendenza: meno ripida (in valore assoluto)

**Analogamente per variazioni di  $p_y$ :**

- $p_y \uparrow$ : Rotazione verso l'interno attorno all'intercetta orizzontale
- $p_y \downarrow$ : Rotazione verso l'esterno attorno all'intercetta orizzontale

**Regola generale:**

- Prezzo aumenta  $\rightarrow$  rotazione verso l'interno
- Prezzo diminuisce  $\rightarrow$  rotazione verso l'esterno
- Punto fisso: intercetta del bene il cui prezzo NON è cambiato

## Inflazione Proporzionale

**Scenario:** Tutti i prezzi e il reddito aumentano dello stesso fattore  $\lambda > 1$ :

$$p'_x = \lambda p_x, \quad p'_y = \lambda p_y, \quad M' = \lambda M$$

**Nuova retta di bilancio:**

$$\lambda p_x x + \lambda p_y y = \lambda M$$

Dividendo per  $\lambda$ :

$$p_x x + p_y y = M$$

→ **Identica alla retta originale!**

### Omogeneità di Grado Zero

Inflazione proporzionale **non cambia** l'insieme di bilancio reale. Solo i prezzi e il reddito *relativi* contano per le scelte del consumatore.

**Implicazione:** Il consumatore non soffre "illusione monetaria", ma reagisce a variazioni reali, non nominali.

## Esempio: Inflazione del 50%

### Situazione originale:

- $M = 60$  euro,  $p_x = 10$  euro,  $p_y = 3$  euro
- Retta:  $10x + 3y = 60 \rightarrow y = 20 - (10/3)x$

### Dopo inflazione 50% ( $\lambda = 1.5$ ):

- $M' = 90$  euro,  $p'_x = 15$  euro,  $p'_y = 4.5$  euro
- Retta:  $15x + 4.5y = 90$

Dividendo per 1.5:

$$10x + 3y = 60$$

**Identica alla retta originale! ✓**

### Verifica intercette:

- Originale:  $(6, 0)$  e  $(0, 20)$
- Dopo inflazione:  $(90/15, 0) = (6, 0)$  e  $(0, 90/4.5) = (0, 20)$  ✓

## Tabella Riepilogativa: Variazioni

| Variazione                    | Effetto Grafico                        | Interpretazione                 |
|-------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------|
| $M \uparrow$                  | Spostamento parallelo esterno          | Più potere d'acquisto           |
| $M \downarrow$                | Spostamento parallelo interno          | Meno potere d'acquisto          |
| $p_x \uparrow$                | Rotazione interna (fisso su asse $y$ ) | $x$ relativamente più costoso   |
| $p_x \downarrow$              | Rotazione esterna (fisso su asse $y$ ) | $x$ relativamente più economico |
| $p_y \uparrow$                | Rotazione interna (fisso su asse $x$ ) | $y$ relativamente più costoso   |
| $p_y \downarrow$              | Rotazione esterna (fisso su asse $x$ ) | $y$ relativamente più economico |
| Inflazione $\lambda$ su tutto | Nessun cambiamento                     | Solo prezzi relativi contano    |

## Esercizio: Identifica la Variazione

**Retta originale:**  $5x + 2y = 100$

**Domanda:** Quale variazione causa ciascuna nuova retta?

a)  $5x + 2y = 150$

**Risposta:**  $M$  aumentato da 100 a 150 (spostamento parallelo esterno) ✓

b)  $10x + 2y = 100$

**Risposta:**  $p_x$  raddoppiato (da 5 a 10), rotazione interna attorno  $(0, 50)$  ✓

c)  $10x + 4y = 200$

**Risposta:** Inflazione 100%: tutti i prezzi e  $M$  raddoppiati → **stessa retta!** ✓

d)  $5x + 4y = 100$

**Risposta:**  $p_y$  raddoppiato (da 2 a 4), rotazione interna attorno  $(20, 0)$  ✓

# Riepilogo Parte 2

## 1. Variazioni di Reddito

- $M \uparrow$  o  $M \downarrow \rightarrow$  spostamento parallelo (pendenza invariata)

## 2. Variazioni di Prezzo

- $p_x$  cambia  $\rightarrow$  rotazione attorno intercetta  $y$
- $p_y$  cambia  $\rightarrow$  rotazione attorno intercetta  $x$
- Prezzo  $\uparrow \rightarrow$  rotazione interna (meno accessibile)
- Prezzo  $\downarrow \rightarrow$  rotazione esterna (più accessibile)

## 3. Inflazione Proporzionale

- Se  $(p_x, p_y, M)$  moltiplicati per  $\lambda \rightarrow$  insieme invariato
- Solo prezzi/reddito *relativi* contano

# Scelta Ottima del Consumatore

- Consumatore ha preferenze:  $U(x, y)$  (curve di indifferenza)
- Deve rispettare vincolo:  $p_x x + p_y y = M$  (retta di bilancio)

**Domanda:** Quale paniere  $(x^*, y^*)$  sceglierà?

## Problema di Massimizzazione Vincolata

Il consumatore sceglie il paniere che:

- Massimizza la propria utilità
- Tra tutti quelli accessibili (nel budget set)

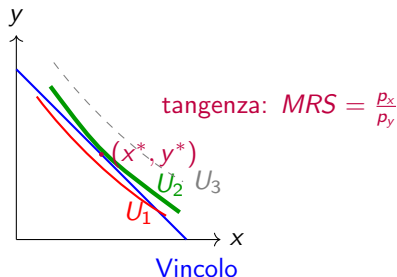
Formalmente:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & U(x, y) \\ \text{s.t.} \quad & p_x x + p_y y = M \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

# Soluzione Grafica: Condizione di Tangenza

## Idea intuitiva:

- Voglio raggiungere la curva di indifferenza più alta possibile
- Ma devo restare sull'insieme di bilancio
- Soluzione ottima: dove curva di indifferenza è **tangente** alla retta di bilancio



$U_1$ : Accessibile ma non ottimale (posso fare meglio)

$U_2$ : Tangente  $\rightarrow$  ottimo!

$U_3$ : Troppo alta, fuori dal budget

## Condizione Matematica: Tangenza

**Al punto ottimo**  $(x^*, y^*)$ :

### Condizione di Tangenza

La pendenza della curva di indifferenza deve uguagliare la pendenza della retta di bilancio:

$$MRS = \frac{p_x}{p_y}$$

**In termini di utilità marginali:**

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_x}{p_y} \longrightarrow \frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y}$$

### Principio Equi-Marginale

All'ottimo, l'**utilità marginale per euro speso** deve essere uguale per entrambi i beni.

**Intuizione:** Se  $MU_x/p_x > MU_y/p_y$ , conviene spostare 1€ da  $y$  a  $x$  per aumentare utilità totale.

# Perché la Tangenza?

## Ragionamento per assurdo:

Supponiamo all'ottimo  $MRS > p_x/p_y$  (es:  $MRS = 3$ ,  $p_x/p_y = 2$ ):

- $MRS = 3$ : Consumatore disposto a cedere 3 unità di  $y$  per 1 di  $x$
- $p_x/p_y = 2$ : Mercato richiede solo 2 unità di  $y$  per 1 di  $x$
- **Conclusione:** Consumatore può migliorare comprando più  $x$  e meno  $y$ !  
→ Il punto non era ottimo

Analogamente, se  $MRS < p_x/p_y$ :

- Consumatore può migliorare comprando più  $y$  e meno  $x$

**Solo quando**  $MRS = p_x/p_y$ :

- Nessuno scambio marginale può migliorare l'utilità
- → Ottimo locale raggiunto

# Metodo 1: Sostituzione

## Problema:

$$\max_{x,y} U(x,y) \quad \text{s.t.} \quad p_x x + p_y y = M$$

## Strategia:

1. Dal vincolo, esprimi  $y$  in funzione di  $x$ :

$$y = \frac{M - p_x x}{p_y}$$

2. Sostituisci in  $U(x,y) \rightarrow$  funzione di solo  $x$ :

$$\tilde{U}(x) = U\left(x, \frac{M - p_x x}{p_y}\right)$$

3. Massimizza rispetto a  $x$ :

$$\frac{d\tilde{U}}{dx} = 0$$

4. Risolvi per  $x^*$
5. Sostituisci  $x^*$  nel vincolo per trovare  $y^*$

## Esempio: Sostituzione con Cobb-Douglas

**Problema:**  $U(x, y) = x^{0.5}y^{0.5}$ , vincolo  $10x + 5y = 100$

**Step 1:** Vincolo  $\rightarrow y = (100 - 10x)/5 = 20 - 2x$

**Step 2:** Sostituisci in  $U$ :

$$\tilde{U}(x) = x^{0.5}(20 - 2x)^{0.5}$$

**Step 3:** Derivata e uguaglia a zero:

$$\frac{d\tilde{U}}{dx} = 0.5x^{-0.5}(20 - 2x)^{0.5} + x^{0.5} \cdot 0.5(20 - 2x)^{-0.5} \cdot (-2) = 0$$

Semplificando (moltiplicando per  $2x^{0.5}(20 - 2x)^{0.5}$ ):

$$(20 - 2x) - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 = 4x \quad \Rightarrow \quad x^* = 5$$

**Step 4:**  $y^* = 20 - 2(5) = 10$

**Soluzione ottima:**  $(x^*, y^*) = (5, 10) \checkmark$

## Metodo 2: Lagrangiana

**Problema:**

$$\max_{x,y} U(x,y) \quad \text{s.t.} \quad p_x x + p_y y = M$$

**Funzione Lagrangiana:**

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) - \lambda(p_x x + p_y y - M)$$

dove  $\lambda$  è il **moltiplicatore di Lagrange**.

**Condizioni del primo ordine (CPO):**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = MU_x - \lambda p_x = 0 \quad \Rightarrow \quad MU_x = \lambda p_x$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = MU_y - \lambda p_y = 0 \quad \Rightarrow \quad MU_y = \lambda p_y$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = M - p_x x - p_y y = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x x + p_y y = M$$

**Sistema di 3 equazioni in 3 incognite:  $(x, y, \lambda)$**

# Derivazione Condizione di Tangenza dalla Lagrangiana

Dalle CPO:

$$MU_x = \lambda p_x \quad \text{e} \quad MU_y = \lambda p_y$$

Dividendo la prima per la seconda:

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\lambda p_x}{\lambda p_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

→ Otteniamo la condizione di tangenza:

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_x}{p_y} \quad \checkmark$$

**Interpretazione di  $\lambda$ :**

Da  $MU_x = \lambda p_x \rightarrow \lambda = MU_x / p_x$

- $\lambda$  = utilità marginale del reddito
- Quanto aumenta  $U$  se ho 1€ in più da spendere
- All'ottimo:  $\lambda > 0$  (vincolo è "stringente", vorrei più reddito)

## Esempio: Lagrangiana con Cobb-Douglas (1)

$$U(x, y) = x^{0.5}y^{0.5}, \text{ vincolo } 10x + 5y = 100$$

**Lagrangiana:**

$$\mathcal{L} = x^{0.5}y^{0.5} - \lambda(10x + 5y - 100)$$

**CPO:**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0.5x^{-0.5}y^{0.5} - 10\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0.5x^{0.5}y^{-0.5} - 5\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 100 - 10x - 5y = 0$$

## Esempio: Lagrangiana con Cobb-Douglas (2)

**Dalle prime due:**

$$0.5 \left( \frac{y}{x} \right)^{0.5} = 10\lambda, \quad 0.5 \left( \frac{x}{y} \right)^{0.5} = 5\lambda$$

Dividendo:

$$\frac{\left( \frac{y}{x} \right)^{0.5}}{\left( \frac{x}{y} \right)^{0.5}} = \frac{10}{5} \Rightarrow \left( \frac{y}{x} \right) = 2 \Rightarrow y = 2x$$

**Sostituendo nel vincolo:**  $10x + 5(2x) = 100 \rightarrow 20x = 100 \rightarrow x^* = 5, y^* = 10 \checkmark$

# Formula Generale: Cobb-Douglas

**Funzione di utilità:**  $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$

**Vincolo:**  $p_x x + p_y y = M$

## Soluzione Ottima

$$x^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{M}{p_x}$$

$$y^* = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{M}{p_y}$$

### Interpretazione:

- Frazione  $\alpha/(\alpha + \beta)$  del reddito spesa in  $x$
- Frazione  $\beta/(\alpha + \beta)$  del reddito spesa in  $y$
- Le quote di spesa dipendono solo da  $\alpha, \beta$  (non da prezzi!)

**Caso speciale:** Se  $\alpha = \beta$  (es:  $U = xy$ ):

$$x^* = \frac{M}{2p_x}, \quad y^* = \frac{M}{2p_y} \quad \longrightarrow \quad \text{metà del reddito per ciascun bene}$$

## Caso $\alpha = \beta = 0.5$

$$U = x^{0.5}y^{0.5}, p_x = 10, p_y = 5, M = 100$$

**Formula generale:**

$$x^* = \frac{0.5}{0.5 + 0.5} \cdot \frac{100}{10} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$
$$y^* = \frac{0.5}{0.5 + 0.5} \cdot \frac{100}{5} = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$$

**Verifica vincolo:**

$$10 \cdot 5 + 5 \cdot 10 = 50 + 50 = 100 \quad \checkmark$$

**Verifica tangenza:**

$$MU_x = 0.5 x^{-0.5} y^{0.5}, \quad MU_y = 0.5 x^{0.5} y^{-0.5}$$
$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{0.5}{0.5} \cdot \frac{y}{x} = \frac{y}{x} = \frac{10}{5} = 2$$
$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{10}{5} = 2 \quad \checkmark$$

$MRS = p_x/p_y \rightarrow$  condizione di tangenza soddisfatta!

## Esercizio 1

**Problema:**  $U(x, y) = x^{0.6}y^{0.4}$ ,  $p_x = 4$ ,  $p_y = 2$ ,  $M = 120$

**a:** Trova la scelta ottima  $(x^*, y^*)$ .

**Soluzione:**

$$x^* = \frac{0.6}{0.6 + 0.4} \cdot \frac{120}{4} = 0.6 \cdot 30 = 18$$

$$y^* = \frac{0.4}{1} \cdot \frac{120}{2} = 0.4 \cdot 60 = 24$$

**b:** Verifica che il vincolo è soddisfatto.

**Soluzione:**  $4 \cdot 18 + 2 \cdot 24 = 72 + 48 = 120 \checkmark$

**c:** Calcola MRS all'ottimo e verifica tangenza.

**Soluzione:**

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{0.6}{0.4} \cdot \frac{y}{x} = 1.5 \cdot \frac{24}{18} = 1.5 \cdot \frac{4}{3} = 2$$

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{4}{2} = 2 \quad \checkmark$$

## Esercizio 2

**Problema:**  $U(x, y) = \ln x + 2 \ln y$ ,  $p_x = 3$ ,  $p_y = 6$ ,  $M = 90$

**Nota:**  $\ln x + 2 \ln y = \ln x + \ln y^2 = \ln(xy^2) \rightarrow$  Equivalente a  $U = x^1 y^2$  (trasformazione monotona)

**Domanda:** Trova  $(x^*, y^*)$ .

**Soluzione:** Identifico  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ :

$$x^* = \frac{1}{1+2} \cdot \frac{90}{3} = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$$

$$y^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{90}{6} = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10$$

**Verifica:**  $3 \cdot 10 + 6 \cdot 10 = 30 + 60 = 90 \checkmark$

**Interpretazione quote di spesa:**

- Spesa in  $x$ :  $3 \cdot 10 = 30$  (1/3 del reddito)
- Spesa in  $y$ :  $6 \cdot 10 = 60$  (2/3 del reddito)
- Quote riflettono pesi  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$

## Casi Speciali: Sostituti e Complementi Perfetti

**Sostituti perfetti:**  $U(x, y) = ax + by$

- MRS costante:  $MRS = a/b$  (sempre)
- Confronto con  $p_x/p_y$ :
  - ▶ Se  $a/b > p_x/p_y$ : Ottimo: comprare solo  $x$  (soluzione d'angolo)
  - ▶ Se  $a/b < p_x/p_y$ : Ottimo: comprare solo  $y$  (soluzione d'angolo)
  - ▶ Se  $a/b = p_x/p_y$ : Indifferenza (qualsiasi punto sulla retta)

**Complementi perfetti:**  $U(x, y) = \min\{ax, by\}$

- Ottimo sempre al vertice:  $ax^* = by^*$  (proporzione fissa)
- Risolvendo con vincolo:

$$x^* = \frac{aM}{ap_x + bp_y}, \quad y^* = \frac{bM}{ap_x + bp_y}$$

**Nota:** Per questi casi, il metodo Lagrangiano standard non funziona (funzione non differenziabile). Usiamo ragionamento economico + vincolo.

## Soluzioni d'Angolo: Quando l'Ottimo è Estremo

**Finora:** Soluzioni interne con tangenza ( $MRS = p_x/p_y$ )

**Ma a volte:** La soluzione ottima è su un **estremo** del vincolo!

### Soluzione d'Angolo

Il consumatore spende tutto il reddito in **un solo bene** (l'altro a quantità zero)

**Quando succede?**

1. **Sostituti perfetti** con  $MRS \neq p_x/p_y$
2. **Preferenze molto sbilanciate** (un bene molto più desiderato)
3. **Prezzi relativi estremi** (un bene troppo costoso rispetto all'utilità)

**Caratteristica:** La curva di indifferenza **non** è tangente alla retta, ma la "tocca" in un vertice (intercetta)

## Esempio: Sostituti Perfetti

**Problema:**  $U(x, y) = 2x + 3y$  (sostituti perfetti)

**Vincolo:**  $4x + 6y = 120$

**Dati:**  $p_x = 4 \text{ €}$ ,  $p_y = 6 \text{ €}$ ,  $M = 120 \text{ €}$

**Step 1: Calcola MRS**

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{2}{3} \approx 0.67$$

**Step 2: Calcola rapporto prezzi**

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0.67$$

**Step 3: Confronta**

$$MRS = \frac{2}{3} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow \text{Indifferenza!}$$

### Soluzione

Il consumatore è **indifferente** tra qualsiasi paniere sulla retta di bilancio.

Soluzioni ottimali: **tutti i punti** da  $(30, 0)$  a  $(0, 20)$  sono ugualmente buoni!

## Esempio: Soluzione d'Angolo Pura (1)

**Problema:**  $U(x, y) = 3x + 2y$  (sostituti perfetti)

**Vincolo:**  $5x + 4y = 100$

**Dati:**  $p_x = 5 \text{ €}$ ,  $p_y = 4 \text{ €}$ ,  $M = 100 \text{ €}$

**Step 1: Calcola MRS**

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{3}{2} = 1.5$$

**Step 2: Calcola rapporto prezzi**

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{5}{4} = 1.25$$

**Step 3: Confronta**

$$MRS = 1.5 > \frac{p_x}{p_y} = 1.25$$

## Esempio: Soluzione d'Angolo Pura (2)

### Interpretazione:

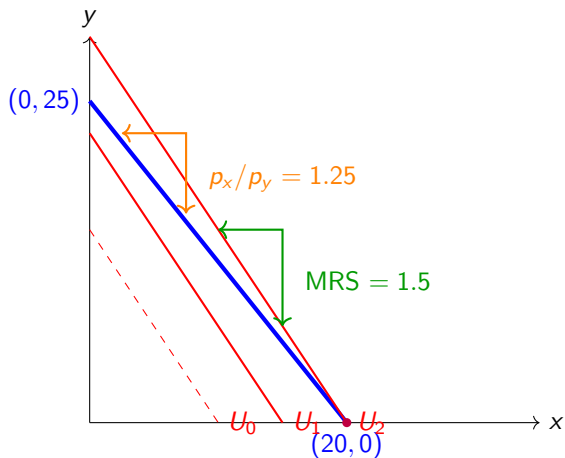
- Consumatore valuta  $x$  più di quanto il mercato lo prezza relativamente
- Per lui: 1 unità di  $x$  vale 1.5 unità di  $y$
- Ma nel mercato: 1 unità di  $x$  costa solo 1.25 unità di  $y$
- **Convenienza:** Comprare solo  $x$ !

### Soluzione Ottima: Angolo

$$x^* = \frac{M}{p_x} = \frac{100}{5} = 20, \quad y^* = 0$$

## Grafico: Soluzione d'Angolo

**Caso:**  $MRS = 1.5 > p_x/p_y = 1.25$



Curve più ripide del vincolo  $\rightarrow$  soluzione d'angolo in  $x$

## Caso Opposto: Comprare solo $y$

**Problema:**  $U(x, y) = x + 3y$  (sostituti perfetti)

**Vincolo:**  $4x + 2y = 80$

**Calcoli:**

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{1}{3} \approx 0.33$$

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{4}{2} = 2$$

**Confronto:**

$$MRS = 0.33 < \frac{p_x}{p_y} = 2$$

**Interpretazione:**

- Consumatore valuta  $x$  **meno** di quanto il mercato lo prezza
- Per lui: 1 unità di  $x$  vale solo 0.33 unità di  $y$
- Ma nel mercato: 1 unità di  $x$  costa 2 unità di  $y$
- **Convenienza:** Comprare solo  $y$ !

# Regola Pratica: Soluzioni d'Angolo (1)

**Per sostituti perfetti**  $U = ax + by$ :

## Regola Decisionale

1. Calcola  $MRS = a/b$
2. Calcola  $p_x/p_y$
3. Confronta:
  - ▶ Se  $\frac{a}{b} > \frac{p_x}{p_y} \rightarrow$  Compra solo  $x$ :  $(M/p_x, 0)$
  - ▶ Se  $\frac{a}{b} < \frac{p_x}{p_y} \rightarrow$  Compra solo  $y$ :  $(0, M/p_y)$
  - ▶ Se  $\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y} \rightarrow$  Indifferenza (qualsiasi punto sul vincolo)

## Regola Pratica: Soluzioni d'Angolo (2)

### Intuizione economica:

- Scegli il bene con **migliore rapporto utilità/prezzo**
- $MRS > p_x/p_y$ :  $x$  dà più "bang for the buck"
- $MRS < p_x/p_y$ :  $y$  dà più "bang for the buck"

**Nota:** Con preferenze convesse (Cobb-Douglas, etc.), soluzioni d'angolo sono rare—servono vincoli aggiuntivi (es:  $x, y \geq 0$  vincolanti per altri motivi).

## Esercizio: Identifica il Tipo di Soluzione

*Per ciascun caso, determina se la soluzione è interna o d'angolo, e trova l'ottimo.*

a)  $U = 4x + 2y$ , vincolo  $3x + 6y = 90$

**Soluzione:**  $MRS = 4/2 = 2$ ,  $p_x/p_y = 3/6 = 0.5$

$MRS = 2 > 0.5 \rightarrow$  Angolo:  $(x^*, y^*) = (30, 0) \checkmark$

b)  $U = x + 4y$ , vincolo  $2x + 3y = 60$

**Soluzione:**  $MRS = 1/4 = 0.25$ ,  $p_x/p_y = 2/3 \approx 0.67$

$MRS = 0.25 < 0.67 \rightarrow$  Angolo:  $(x^*, y^*) = (0, 20) \checkmark$

c)  $U = x^{0.5}y^{0.5}$ , vincolo  $4x + 2y = 80$

**Soluzione:** Cobb-Douglas  $\rightarrow$  Soluzione **interna** (sempre con preferenze convesse)

Formula:  $x^* = 0.5 \cdot 80/4 = 10$ ,  $y^* = 0.5 \cdot 80/2 = 20 \checkmark$

d)  $U = 3x + 3y$ , vincolo  $2x + 2y = 100$

**Soluzione:**  $MRS = 3/3 = 1$ ,  $p_x/p_y = 2/2 = 1$

$MRS = p_x/p_y \rightarrow$  **Indifferenza** totale: qualsiasi punto da  $(50, 0)$  a  $(0, 50) \checkmark$

# Riepilogo Generale

## Parte 1: Vincolo di Bilancio

- Equazione:  $p_x x + p_y y = M$
- Retta con pendenza  $-p_x/p_y$  (trade-off di mercato)
- Insieme di bilancio: panieri accessibili

## Parte 2: Variazioni

- $M$  cambia  $\rightarrow$  spostamento parallelo
- Prezzi cambiano  $\rightarrow$  rotazione
- Inflazione proporzionale  $\rightarrow$  nessun effetto reale

## Parte 3: Scelta Ottima

- Condizione:  $MRS = p_x/p_y$  (tangenza)
- Metodi: sostituzione e Lagrangiano
- Formula Cobb-Douglas:  $x^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{M}{p_x}$

# Competenze Acquisite

- ✓ Scrivere e disegnare il vincolo di bilancio
- ✓ Analizzare effetti di variazioni di prezzi/reddito
- ✓ Formulare il problema di massimizzazione del consumatore
- ✓ Applicare metodo sostituzione e Lagrangiano
- ✓ Calcolare scelta ottima per Cobb-Douglas
- ✓ Verificare la condizione di tangenza

## Esercizi Facoltativi per Casa

1.  $U = x^{0.4}y^{0.6}$ ,  $p_x = 2$ ,  $p_y = 4$ ,  $M = 80$ . Trova  $(x^*, y^*)$ .
2. Stesso problema. Ora  $M$  aumenta a 120. Trova nuovo ottimo.
3.  $U = \ln x + \ln y$ ,  $p_x = 3$ ,  $p_y = 6$ ,  $M = 90$ . Trova  $(x^*, y^*)$  con Lagrangiano.
4. Verifica che con  $U = xy$ , se  $M$  raddoppia, anche  $(x^*, y^*)$  raddoppiano.
5. Disegna retta di bilancio per  $2x + 4y = 100$ . Poi grafica effetto di:
  - a)  $M$  aumenta a 150
  - b)  $p_x$  raddoppia
  - c) Inflazione 50% su tutto