

Microeconomia

Lezione 7: Rendimenti di Scala, Isoquanti e MRTS

Marco Rosso

Università di Bologna

A.A. 2025–2026

6 marzo 2026

Cosa sappiamo finora

- Tecnologia: $Q = f(L, K)$
- Prodotti marginali: MPL , MPK
- Breve periodo: rendimenti marginali decrescenti (con un input fisso)

Prossimo passo

Cosa succede quando aumentano **entrambi** gli input? E come rappresentiamo la tecnologia nel piano (L, K) con gli **isoquanti**?

Obiettivi della lezione

Dopo questa lezione sarete in grado di:

1. Definire i **rendimenti di scala**
2. Collegare rendimenti di scala ed economie/diseconomie
3. Definire gli **isoquanti** e descriverne le proprietà
4. Calcolare e interpretare il **MRTS**
5. Risolvere esercizi su isoquanti, MRTS e rendimenti di scala

Focus della lezione

Capire **scala** e **sostituibilità**: quanto conviene crescere e quanto facilmente puoi sostituire lavoro con capitale.

Rendimenti di scala: definizione

Considera $t > 1$ e confronta:

$$f(tL, tK) \quad \text{con} \quad tf(L, K)$$

- ▶ **Rendimenti di scala crescenti:** $f(tL, tK) > tf(L, K)$
- ▶ **Rendimenti di scala costanti:** $f(tL, tK) = tf(L, K)$
- ▶ **Rendimenti di scala decrescenti:** $f(tL, tK) < tf(L, K)$

Intuizione: cosa stiamo confrontando?

Se raddoppio tutti gli input:

$$(L, K) \rightarrow (2L, 2K)$$

quanto aumenta l'output?

- Se l'output **più che raddoppia** $\Rightarrow$ rendimenti crescenti
- Se l'output **raddoppia esattamente** $\Rightarrow$ rendimenti costanti
- Se l'output **meno che raddoppia** $\Rightarrow$ rendimenti decrescenti

Attenzione

Questo è diverso dai **rendimenti marginali decrescenti**: lì aumentava *un solo input*, qui aumentano *tutti*.

Confronto: rendimenti marginali e rendimenti di scala

Concetto	Domanda
Prodotto marginale	Se aumento solo L di 1, quanto cresce Q ?
Rendimenti di scala	Se aumento tutti gli input proporzionalmente, quanto cresce Q ?

Messaggio

Sono due concetti distinti:

- puoi avere MPL decrescente
- e allo stesso tempo rendimenti di scala costanti o crescenti

Cobb–Douglas e rendimenti di scala

Data:

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

possiamo calcolare:

$$f(tL, tK) = A(tL)^{\alpha}(tK)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}AL^{\alpha}K^{\beta}$$

che si semplifica in:

$$f(tL, tK) = t^{\alpha+\beta}f(L, K)$$

Quindi ci basta semplicemente guardare i valori α e β :

- $\alpha + \beta > 1 \Rightarrow$ RTS **crescenti**
- $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow$ RTS **costanti**
- $\alpha + \beta < 1 \Rightarrow$ RTS **decrescenti**

Esercizio

Classifica i rendimenti di scala per:

1. $Q = L^{0.7} K^{0.4}$

2. $Q = L^{0.5} K^{0.5}$

3. $Q = L^{0.3} K^{0.4}$

Soluzione

Somma esponenti:

1. $0.7 + 0.4 = 1.1 > 1 \Rightarrow$ RTS crescenti
2. $0.5 + 0.5 = 1 \Rightarrow$ RTS costanti
3. $0.3 + 0.4 = 0.7 < 1 \Rightarrow$ RTS decrescenti

Perché esistono economie di scala?

- **Specializzazione**: compiti più divisi e più efficienti
- **Indivisibilità**: grandi impianti usati meglio
- **Costi fissi**: distribuiti su più output
- **Logistica / acquisti**: potere contrattuale più alto

Esempio

Un piccolo panificio e un grande impianto industriale non hanno la stessa efficienza se entrambi raddoppiano.

Intuizione: economie di scala crescenti

Caso: piattaforma e-commerce

Un e-commerce che raddoppia magazzini, software e personale non sempre raddoppia solo le consegne: può fare **più del doppio** grazie a:

- processi standardizzati,
- software già sviluppato,
- costi fissi distribuiti su molti ordini,
- acquisti logistici più convenienti.

Messaggio

Le economie di scala nascono quando crescere di dimensione rende l'organizzazione **più efficiente**, non solo più grande.

Perché emergono diseconomie di scala?

Quando l'impresa cresce troppo:

- più livelli gerarchici
- più burocrazia
- più costi di coordinamento
- più congestione di risorse comuni

Intuizione

Più grande non significa sempre più efficiente.

Intuizione: diseconomie di scala

Caso: impresa molto grande e multilivello

Quando l'impresa cresce troppo, possono aumentare:

- tempi decisionali,
- costi di coordinamento,
- errori di comunicazione,
- conflitti tra reparti,
- rigidità burocratica.

Messaggio

Oltre una certa dimensione, la complessità organizzativa può far crescere i costi e ridurre l'efficienza.

Esercizio: rendimenti di scala

Un'impresa di catering raddoppia:

$$L \rightarrow 2L, \quad K \rightarrow 2K$$

e osserva che la produzione passa da 1,000 pasti a 2,400 pasti.

1. Che tipo di rendimenti di scala osservi?
2. Dai una possibile spiegazione aziendale.

Soluzione

Se output passa da 1,000 a 2,400, cresce più del doppio:

$$2400 > 2 \cdot 1000$$

Quindi ci sono **rendimenti di scala crescenti**.

Possibile spiegazione

La cucina centrale, la logistica e l'organizzazione vengono sfruttate meglio su scala più grande.

Dal livello di output alla mappa degli input

Finora abbiamo scritto:

$$Q = f(L, K)$$

Ma possiamo anche fissare un output $\bar{Q}$ e chiederci:

Domanda

Quali combinazioni di lavoro e capitale producono esattamente lo stesso output?

Isoquanti: definizione

Un **isoquanto** è l'insieme delle combinazioni (L, K) che producono lo stesso output $\bar{Q}$:

$$\{(L, K) : f(L, K) = \bar{Q}\}$$

Analogia

Gli isoquanti sono l'analogo delle curve di indifferenza, ma qui rappresentano **stesso output**, non stessa utilità.

Cosa ci dice un isoquante?

Lettura manageriale

Un isoquante dice tutte le combinazioni di lavoro e capitale che permettono di ottenere lo **stesso livello di output**.

Caso: magazzino

Per gestire 10,000 ordini/mese puoi:

- usare più addetti e meno automazione,
- oppure meno addetti e più tecnologia.

Entrambe le combinazioni possono stare sullo stesso isoquante.

Perché sono utili gli isoquanti?

Permettono di visualizzare:

- quanto puoi sostituire L con K
- se la tecnologia è rigida o flessibile
- come cambia l'uso ottimo dei fattori quando cambiano i prezzi

Proprietà tipiche degli isoquanti

Con tecnologia standard:

- pendenza negativa
- non si intersecano
- convessità verso l'origine

Intuizione

Se hai più lavoro, in genere puoi usare meno capitale per ottenere lo stesso output.

Perché la pendenza è negativa?

Se vuoi mantenere Q costante:

- se aumenti L , puoi ridurre K
- se riduci L , devi aumentare K

Esempio

In un magazzino, più automazione può ridurre il fabbisogno di lavoro; più addetti possono compensare meno automazione.

Perché gli isoquanti non si intersecano?

Se due isoquanti si intersecassero nello stesso punto (L, K) , quella stessa combinazione produrrebbe due livelli diversi di output.

$$f(L, K) = Q_1 \quad \text{e} \quad f(L, K) = Q_2, \quad Q_1 \neq Q_2$$

Contraddizione

La funzione di produzione assegna un solo output a ogni combinazione di input.

Perché gli isoquanti sono convessi?

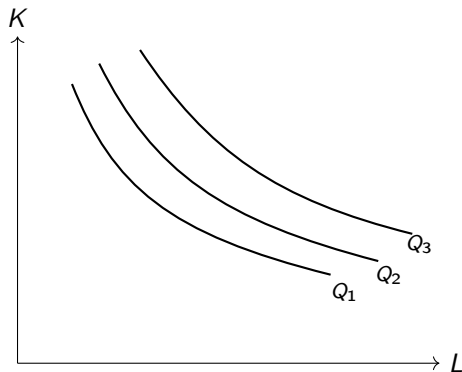
La convessità riflette un'idea standard:

- quando usi già tanto lavoro e poco capitale,
- sostituire ancora capitale con lavoro diventa sempre più difficile.

Messaggio

La sostituzione tecnica è possibile, ma non illimitata e non a tasso costante.

Grafico: isoquanti per output crescenti



Lettura

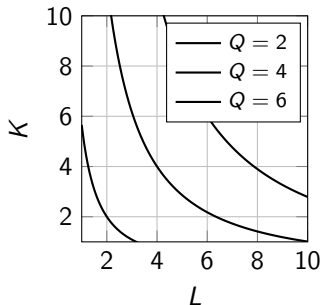
Isoquanti più lontani dall'origine corrispondono a output più alti.

Grafico: isoquanti Cobb–Douglas

Consideriamo:

$$Q = L^{0.6} K^{0.4}$$

Isoquanti per tre livelli di output.



Cosa si vede

Gli isoquanti sono decrescenti e convessi: il trade-off tra L e K non è costante.

Come leggere il grafico degli isoquanti Cobb–Douglas

- Gli isoquanti più lontani dall'origine corrispondono a output più alti
- Se aumenti L , puoi ridurre K mantenendo lo stesso output
- Ma la riduzione di K possibile diventa via via più limitata

Intuizione

Se hai già molto lavoro e poco capitale, un lavoratore in più non può rimpiazzare molto capitale: il MRTS diminuisce.

MRTS: definizione

Lungo un isoquanto, $dQ = 0$:

$$dQ = MPL dL + MPK dK = 0$$

Da cui:

$$-\frac{dK}{dL} \Big|_{Q=\bar{Q}} = \frac{MPL}{MPK} \equiv MRTS_{LK}$$

Interpretazione

Quanto capitale puoi ridurre se aumenti il lavoro di 1 unità mantenendo costante l'output.

Interpretazione economica del MRTS

Se $MRTS = 2$, significa che:

- aumentando L di 1,
- puoi ridurre K di circa 2
- senza cambiare Q

Nota

Il MRTS dipende dal punto in cui ti trovi sull'isoquanto.

Perché il MRTS di solito decresce?

Se hai già tanto lavoro e poco capitale:

- un lavoratore in più serve relativamente a poco
- togliere altro capitale diventa costoso in termini di output

Messaggio

La quantità di capitale che puoi “sostituire” con lavoro diminuisce man mano che usi più lavoro.

MRTS in pratica

Caso: supermercato

Per gestire le casse puoi combinare:

- più cassieri,
- più casse automatiche.

Lettura del MRTS

Il MRTS dice quante casse automatiche puoi “risparmiare” se aggiungi un cassiere, mantenendo costante il servizio.

Messaggio

Più sei già labour-intensive, meno un cassiere in più può sostituire tecnologia.

Esercizio

Dato:

$$Q = L^{0.6} K^{0.4}$$

1. Calcola MPL e MPK
2. Calcola $MRTS = \frac{MPL}{MPK}$
3. Valuta il MRTS in $(L, K) = (16, 9)$

Soluzione

$$MPL = 0.6L^{-0.4}K^{0.4} \quad MPK = 0.4L^{0.6}K^{-0.6}$$

$$MRTS = \frac{MPL}{MPK} = \frac{0.6}{0.4} \cdot \frac{K}{L} = 1.5 \cdot \frac{K}{L}$$

In (16, 9):

$$MRTS = 1.5 \cdot \frac{9}{16} = 0.84375$$

Interpretazione

Se aumento L di 1, posso ridurre K di circa 0.84 mantenendo Q costante.

Esercizio

In un certo punto dell'isoquante, il MRTS vale:

$$MRTS = 3$$

1. Come interpreti questo numero?
2. Se il MRTS scende da 3 a 1.5 lungo lo stesso isoquante, cosa significa economicamente?

Soluzione

- 1) Se $MRTS = 3$, aumentando L di 1 unità puoi ridurre K di circa 3 unità mantenendo costante Q .
- 2) Se il $MRTS$ scende da 3 a 1.5, significa che il lavoro diventa meno capace di sostituire il capitale: stai usando già molto lavoro rispetto al capitale.

Tre casi di sostituibilità

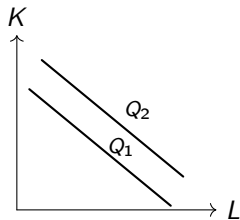
- **Perfetti sostituti**: isoquanti lineari
- **Perfetti complementi**: isoquanti a L
- **Cobb–Douglas / caso standard**: isoquanti convessi

Perché è importante?

Perché la forma degli isoquanti dice quanto è facile riorganizzare la produzione.

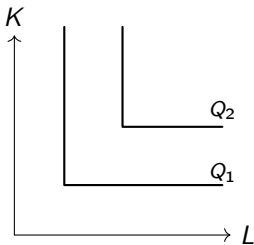
Tre forme di isoquanti

Perfetti sostituti



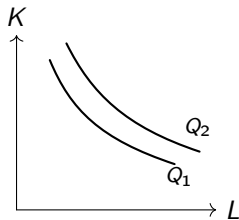
Trade-off costante tra L e K

Perfetti complementi



Servono proporzioni fisse

Caso standard



Sostituibilità parziale, MRTS
decescente

Perfetti sostituti

Esempio intuitivo

Due addetti identici che svolgono esattamente lo stesso task standardizzato.

Se 1 unità di K può sempre essere sostituita da 1 unità di L a tasso costante:

- isoquanti lineari
- MRTS costante

Perfetti complementi

Esempio intuitivo

1 autista + 1 camion.

Se servono proporzioni fisse:

- aggiungere solo uno dei due input non serve
- isoquanti ad angolo

Messaggio

Non sempre i fattori si sostituiscono: a volte si **combinano**.

Caso standard

La maggior parte delle tecnologie reali è tra i due estremi:

- esiste sostituibilità
- ma non perfetta
- e il MRTS decresce

Esempio

Più automazione può ridurre lavoro, ma non eliminarlo del tutto.

Esercizio

- Spiega in 4 righe perché due isoquanti non possono intersecarsi.

Se due isoquanti si intersecassero nello stesso punto (L, K) , la stessa combinazione di input produrrebbe due livelli diversi di output.

Questo contraddice la definizione di funzione di produzione, che associa un solo output a ogni combinazione di input.

Esercizio

Dato:

$$Q = L^{0.6}K^{0.4}$$

calcola il MRTS in:

$$(L, K) = (20, 10)$$

Soluzione

$$MRTS = \frac{0.6}{0.4} \cdot \frac{K}{L} = 1.5 \cdot \frac{K}{L}$$

$$MRTS = 1.5 \cdot \frac{10}{20} = 0.75$$

Interpretazione

+1 unità di lavoro consente di ridurre circa 0.75 unità di capitale, mantenendo l'output costante.

Esercizio

Per ciascun caso, indica se i fattori sono più simili a:

- perfetti sostituti
- perfetti complementi
- caso intermedio

1. autista e camion
2. cassieri umani e casse automatiche
3. due impiegati identici che inseriscono dati standardizzati

Soluzione

1. **Autista e camion:** perfetti complementi.
2. **Cassieri e casse automatiche:** caso intermedio, con una certa sostituibilità ma non perfetta.
3. **Due impiegati identici:** più vicini a perfetti sostituti.

Attività di gruppo

Lavorate in gruppi.

Scegliete un'impresa reale e discutete:

1. dove potrebbero esserci economie di scala?
2. dove potrebbero emergere diseconomie?
3. i fattori produttivi sono più sostituti o più complementi?

Perché tutto questo ci serve?

Minimizzare i costi

L'impresa non vuole solo produrre: vuole produrre **al costo minimo**.

Per farlo dovrà combinare:

- **isoquanti**: tecnologia
- **isocosti**: prezzi dei fattori

Idea

La scelta ottima dei fattori nascerà dall'incontro tra: *trade-off tecnico* e *trade-off di costo*

Riepilogo generale

- Rendimenti di scala: confronto tra $f(tL, tK)$ e $tf(L, K)$
- Isoquanti: combinazioni di input che producono lo stesso output
- MRTS: trade-off tecnico tra lavoro e capitale
- Tre casi: sostituti, complementi, intermedio

Competenze acquisite

- ✓ Classificare i rendimenti di scala
- ✓ Leggere e disegnare isoquanti
- ✓ Calcolare e interpretare il MRTS
- ✓ Applicare i concetti a esempi aziendali

Esercizi facoltativi per casa

1. Per $Q = L^{0.4}K^{0.6}$ calcola il MRTS e commenta come varia al variare di K/L .
2. Spiega perché gli isoquanti sono tipicamente convessi.
3. Elenca due economie e due diseconomie di scala per un'impresa che conosci.