

Appunti di Microeconomia

Laurea in Economia Aziendale

A.A. 2025–2026

Marco Rosso

19 aprile 2026

Indice

1	Metodo economico e strumenti di base	1
1.1	Cos'è la microeconomia	1
1.2	Scarsità e trade-off	1
1.2.1	Costo opportunità	1
1.3	Frontiera delle possibilità produttive (FPP)	2
1.4	Sunk costs	2
1.5	Analisi marginale	3
1.6	Strumenti matematici di base	3
1.7	Esercizi	4
I	Teoria del Consumatore	5
2	Preferenze, utilità e saggio marginale di sostituzione	6
2.1	Il problema del consumatore	6
2.2	Panieri e relazioni di preferenza	6
2.3	Assiomi delle preferenze razionali	7
2.4	Utilità ordinale e utilità cardinale	7
2.5	Curve di indifferenza	7
2.6	Tipologie di preferenze	8
2.6.1	Cobb-Douglas	8
2.6.2	Sostituti perfetti	8
2.6.3	Complementi perfetti	9
2.7	Utilità marginali e MRS	9
2.8	Esercizi	10
3	Vincolo di bilancio e scelta ottima	11
3.1	Il problema economico	11
3.2	Vincolo di bilancio	11
3.3	Insieme di bilancio	12
3.4	Variazioni di reddito e prezzi	13

3.4.1	Variazioni del reddito	13
3.4.2	Variazioni dei prezzi	13
3.4.3	Inflazione proporzionale	14
3.5	Dalla fattibilità alla scelta	15
3.6	Scelta ottima del consumatore	15
3.6.1	Soluzione grafica e condizione di tangenza	15
3.7	Metodo della sostituzione	16
3.8	Metodo di Lagrange	17
3.9	Soluzione Cobb–Douglas	17
3.10	Soluzioni d’angolo	18
3.11	Esercizi	19
4	Domanda individuale, statica comparata ed elasticità	21
4.1	Domanda Marshalliana (domanda individuale)	21
4.2	Curva di domanda e statica comparata	22
4.2.1	Prezzo dell’altro bene: sostituti e complementi	22
4.3	ICC, curve di Engel e tipologie di beni	23
4.4	Domanda compensata (Hicksiana) ed equazione di Slutsky	24
4.5	Curva prezzo-consumo e derivazione grafica della domanda	25
4.6	Elasticità della domanda	25
4.7	Elasticità e ricavi totali	27
4.8	Esercizi	28
II	Teoria del Produttore	31
5	Tecnologia e Produzione	32
5.1	Il problema del produttore	32
5.2	Breve periodo e lungo periodo	32
5.3	Prodotto marginale e rendimenti marginali decrescenti	33
5.4	Prodotto totale, medio e marginale	33
5.5	Rendimenti di scala	34
5.6	Esercizi	35
6	Isoquanti, MRTS e Tipi di Tecnologia	36
6.1	Isoquanti	36
6.2	Saggio marginale di sostituzione tecnica (MRTS)	36
6.3	Tipi di tecnologia	37
6.3.1	Cobb–Douglas (caso generale)	37
6.3.2	Sostituti perfetti	37

6.3.3	Complementi perfetti (proporzioni fisse)	38
6.4	Esercizi	38
7	Costi di Produzione e Curve di Costo	40
7.1	Dalla tecnologia ai costi	40
7.2	Costi fissi, variabili e totali	40
7.3	Costi medi e costo marginale	40
7.4	Forma delle curve di costo e relazione tra MC e AC	41
7.5	Costi nel lungo periodo ed economie di scala	42
7.6	Esercizi	43
8	Minimizzazione dei Costi e Scelta Ottimale dei Fattori	45
8.1	Simmetria con il consumatore	45
8.2	Il problema di minimizzazione dei costi	45
8.3	Rette di isocosto	45
8.4	Condizione di tangenza: $MRTS = w/r$	46
8.5	Soluzione con tecnologia Cobb–Douglas	47
8.6	Statica comparata: effetti di variazioni di w e r	48
8.7	Esercizi	48
9	Massimizzazione del Profitto	52
9.1	Profitto contabile e profitto economico	52
9.2	L'impresa price-taker	53
9.3	Il problema di massimizzazione del profitto	54
9.3.1	Impostazione formale	54
9.3.2	Condizioni del primo e del secondo ordine	54
9.4	Il profitto come area	55
9.5	La condizione di shutdown	56
9.5.1	Impostazione del problema	56
9.5.2	Derivazione formale	56
9.5.3	Shutdown in lungo periodo	57
9.6	Le quattro zone e la curva di offerta di breve periodo	58
9.7	Esercizi	58
10	Offerta dell'Impresa e Offerta di Mercato	61
10.1	Dalla scelta ottima alla curva di offerta	61
10.2	Derivazione analitica	62
10.2.1	Procedura operativa	62
10.2.2	Caso con costo quadratico (forma chiusa semplice)	62

10.2.3	Caso con costo cubico (radici multiple)	63
10.3	Proprietà della curva di offerta	63
10.3.1	Monotonia: la curva di offerta è crescente	63
10.3.2	Il teorema dell'involuppo e la funzione di profitto indiretta	64
10.4	Movimenti lungo la curva e spostamenti della curva	64
10.5	Offerta di mercato: aggregazione orizzontale	65
10.5.1	Principio di aggregazione	65
10.5.2	Imprese identiche	65
10.5.3	Imprese eterogenee e kink	66
10.6	Elasticità dell'offerta	66
10.6.1	Definizione e calcolo	66
10.6.2	Determinanti dell'elasticità	67
10.7	Esercizi	68
11	Alla prossima settimana....	70
A	Matematica di base per la microeconomia	71
A.1	Derivate fondamentali	71
A.2	Derivate parziali	71
A.3	Massimi e minimi di funzioni di una variabile	72
A.4	Ottimizzazione vincolata e moltiplicatori di Lagrange	72
A.5	Proprietà di potenze e logaritmi	73
A.6	Funzioni omogenee	73
A.7	Prodotti notevoli	74
B	Formulario	75
B.1	Teoria del consumatore	75
B.2	Domanda individuale ed elasticità	76
B.3	Tecnologia e produzione	76
B.4	Isoquanti, MRTS e minimizzazione dei costi	77
B.5	Curve di costo nel breve periodo	78
B.6	Costi nel lungo periodo e curva <i>LAC</i>	79
B.7	Condizioni di ottimo	80
C	Soluzioni degli esercizi	81
Cap. 1	– Metodo economico	81
Cap. 2	– Preferenze e MRS	81
Cap. 3	– Vincolo di bilancio	82
Cap. 4	– Domanda ed elasticità	83

Cap. 5 – Tecnologia e Produzione	84
Cap. 6 – Isoquanti e MRTS	84
Cap. 7 – Curve di costo	85
Cap. 8 – Minimizzazione dei costi	86
Domande ed esercizi – Teoria del Consumatore	87
Domande ed esercizi – Teoria del Produttore	89

Capitolo 1

Metodo economico e strumenti di base

1.1 Cos'è la microeconomia

La microeconomia studia come individui e imprese prendono decisioni in presenza di risorse scarse. Analizza:

- scelte di consumo,
- decisioni di produzione,
- formazione dei prezzi,
- effetti delle politiche pubbliche.

Idea chiave

La microeconomia utilizza modelli semplificati per isolare i meccanismi fondamentali delle decisioni economiche.

Esempio

Prezzi dei voli e scelta del consumatore

Una compagnia aerea osserva che, quando il prezzo dei voli aumenta, molti studenti rinunciano al weekend fuori sede e scelgono di restare in città. La microeconomia studia esattamente questo tipo di comportamento: come i soggetti reagiscono a vincoli, incentivi e prezzi.

1.2 Scarsità e trade-off

Le risorse sono limitate, i bisogni potenzialmente infiniti. Ogni scelta implica una rinuncia: questo è il trade-off.

1.2.1 Costo opportunità

Definizione 1.1 (Costo opportunità).

Il costo opportunità è il valore della migliore alternativa a cui si rinuncia.

Esempio

Università o lavoro.

Costi espliciti (tasse, libri): 9.000€. Costo opportunità (salario rinunciato): 54.000€ per 3 anni.
Costo economico totale: 63.000€.

Esempio**Concerto gratuito**

Hai un biglietto gratuito per un concerto, ma per andarci devi rinunciare a una serata di lavoro da 80 euro. Anche se il biglietto è gratis, il costo opportunità della partecipazione è 80 euro.

Intuizione economica

Il "gratis" ha sempre un costo. Un biglietto concerto "gratuito" costa il salario del turno rinunciato.

1.3 Frontiera delle possibilità produttive (FPP)

La FPP rappresenta le combinazioni massime di due beni (o attività) producibili date le risorse e la tecnologia disponibili. I punti *sulla* frontiera sono efficienti; i punti *all'interno* sono raggiungibili ma inefficienti (si sprecano risorse); i punti *all'esterno* sono al momento irraggiungibili.

Esempio lineare con due beni A e B :

$$B = 10 - 0.5A.$$

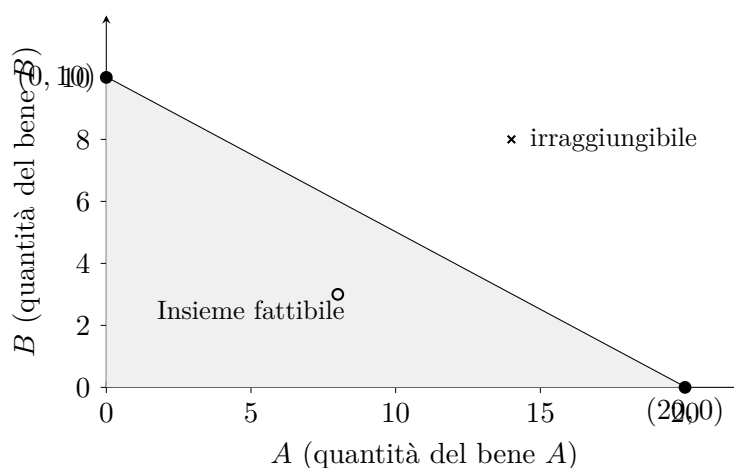


Figura 1.1: Frontiera delle possibilità produttive $B = 10 - 0.5A$. La pendenza -0.5 è il costo opportunità: produrre un'unità in più di A richiede rinunciare a 0.5 unità di B .

- Intercetta verticale: 10 (tutto in B , niente in A).
- Intercetta orizzontale: 20 (tutto in A , niente in B).
- Pendenza: -0.5 (costo opportunità di A in termini di B).

Idea chiave

La pendenza della FPP (in valore assoluto) misura il costo opportunità: quante unità di B bisogna sacrificare per produrre un'unità in più di A . Con rendimenti crescenti nella trasformazione, la FPP è concava (costo opportunità crescente).

1.4 Sunk costs

Definizione 1.2 (Sunk cost).

Un sunk cost è un costo già sostenuto e non recuperabile.

Errore comune

Continuare un film noioso "perché ho pagato il biglietto" è sunk cost fallacy. Decidi sui costi/benefici futuri.

Esempio**Abbonamento annuale in palestra**

Hai già pagato 400 euro per la palestra, ma oggi sei stanco e non hai voglia di andare. Quei 400 euro sono un costo già sostenuto e non recuperabile: non dovrebbero influenzare la decisione di oggi, che dipende solo da costi e benefici futuri.

1.5 Analisi marginale

Le decisioni ottimali si prendono confrontando benefici marginali e costi marginali.

Ottimo quando $BM = CM$

Esempio profitto:

$$\pi(q) = 50q - 5q^2 - 100$$

$$\pi'(q) = 50 - 10q = 0 \Rightarrow q = 5$$

Intuizione economica

Finché il beneficio marginale supera il costo marginale conviene aumentare la produzione.

Esempio**Ore di studio**

Uno studente decide quante ore dedicare alla preparazione di un esame. Le prime ore di studio aumentano molto la preparazione, ma dopo molte ore la stanchezza riduce il beneficio marginale. La scelta ottima si ha quando il beneficio marginale di un'ora in più eguaglia il costo marginale in termini di fatica e tempo.

1.6 Strumenti matematici di base

Vedi Appendice A per le regole complete di derivazione.

Derivata

La derivata misura la variazione marginale: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Per $U(x, y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}$$

Questi strumenti saranno usati per:

- utilità marginali,

- MRS,
- prodotto marginale,
- MRTS.

1.7 Esercizi

Esercizio 1.1.

Calcolare il costo opportunità nella FPP $B = 20 - A$.

Esercizio 1.2.

Calcolare la derivata di $f(x) = 4x^2 + 3x$.

Esercizio 1.3.

Un'impresa ha $\pi(q) = 60q - 6q^2 - 100$. Calcolare la quantità ottima.

Esercizio 1.4.

Spiegare perché un sunk cost è irrilevante per una decisione futura.

Esercizio 1.5.

Caso integrato: FPP $B = 12 - 0.25A$. Trova intercette e interpreta pendenza.

Parte I

Teoria del Consumatore

Capitolo 2

Preferenze, utilità e saggio marginale di sostituzione

2.1 Il problema del consumatore

Il consumatore sceglie il paniere che massimizza il proprio benessere. Prima di introdurre prezzi e reddito, descriviamo le preferenze su \mathbb{R}_+^2 .

Esempio

Scelta tra cibo e tempo libero

Un consumatore può spendere il proprio reddito in cene fuori casa oppure conservarlo per altre spese e più tempo libero. Prima ancora di introdurre i prezzi, dobbiamo capire quali combinazioni di beni e attività preferisce.

2.2 Panieri e relazioni di preferenza

Un paniere è $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$.

Notazione:

- $A \succ B$
- $A \succeq B$
- $A \sim B$

Esempio

Netflix e Spotify

Supponiamo che un consumatore stia confrontando due panieri:

- paniere A: abbonamento Netflix + nessun abbonamento Spotify
- paniere B: nessun Netflix + abbonamento Spotify

La relazione di preferenza descrive se A è preferito a B, B è preferito ad A, oppure se il consumatore è indifferente.

2.3 Assiomi delle preferenze razionali

Definizione 2.1 (Assiomi delle preferenze).

Sia \succsim una relazione di preferenza su $X \subseteq \mathbb{R}_+^2$. Gli assiomi sono:

1. **Completezza:** $\forall A, B \in X, A \succsim B$ o $B \succsim A$.
2. **Transitività:** $\forall A, B, C \in X$, se $A \succsim B$ e $B \succsim C$, allora $A \succsim C$.
3. **Monotonicità:** se A ha almeno tanta x e y di B , e più di almeno uno, allora $A \succ B$.
4. **Convessità:** se $A \sim B$, allora $\lambda A + (1 - \lambda)B \succsim A$ per $\lambda \in (0, 1)$.

Proposizione 2.1. *Se le preferenze soddisfano i 4 assiomi, esiste $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $A \succ B \iff U(A) > U(B)$.*

Idea della dimostrazione

La completezza+transitività garantisce un ordinamento totale. La monotonicità+convessità garantisce continuità e rappresentazione.

Intuizione economica

Senza transitività, "money pump": mela \succ banana \succ arancia \succ mela \rightarrow scambi infiniti = povertà.

2.4 Utilità ordinale e utilità cardinale

Definizione 2.2.

L'utilità ordinale rappresenta preferenze con trasformazioni monotone crescenti: $V = f(U)$, $f' > 0$.

Esempio analitico

$U = xy$, $V = 2xy + 5$, $W = \ln(xy)$ rappresentano le *stesse* preferenze.

Idea chiave

Contano gli ordini, non i valori assoluti. $U = 10 > U = 5$ non significa "il doppio meglio".

Esempio

Stessa classifica, numeri diversi

Se due studenti classificano gli stessi film nello stesso ordine, uno può usare voti da 1 a 10 e l'altro da 1 a 100. I numeri cambiano, ma l'ordinamento resta identico. Lo stesso vale per l'utilità ordinale: conta l'ordine dei panieri, non il valore numerico assoluto.

2.5 Curve di indifferenza

$$U(x, y) = \bar{U}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$$

Proprietà

1. **Pendenza negativa** (monotonicità).
2. **Non si intersecano** (transitività).

3. **Nord-est meglio** (monotonicità).
4. **Convessità** (convessità delle preferenze).

Esempio**Pizza e birra**

Una curva di indifferenza raccoglie tutte le combinazioni di pizza e birra che danno al consumatore lo stesso livello di soddisfazione. Se una combinazione contiene più pizza e più birra di un'altra, in genere si trova su una curva di indifferenza più alta.

2.6 Tipologie di preferenze

2.6.1 Cobb-Douglas

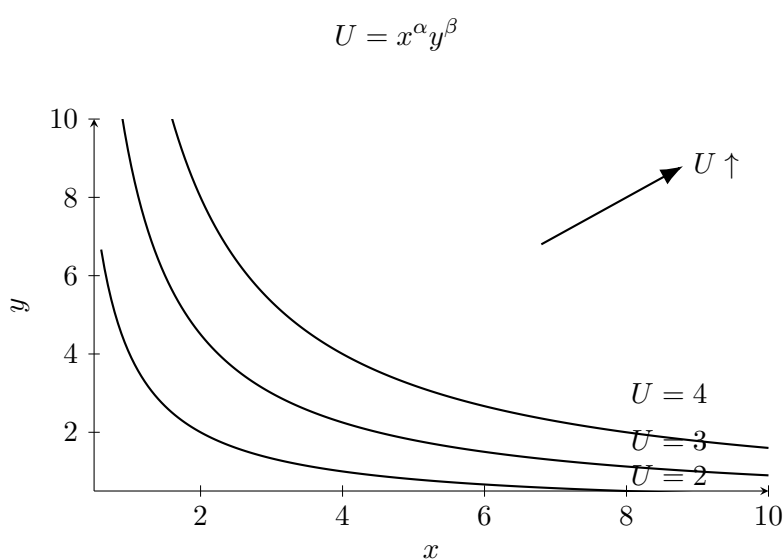


Figura 2.1: Curve di indifferenza Cobb–Douglas: convesse verso l’origine (sostituibilità imperfetta).

Esempio**Pasti fuori casa e cinema**

Una preferenza Cobb–Douglas può descrivere un consumatore che desidera sia pasti fuori casa sia intrattenimento. I due beni sono sostituibili solo parzialmente: più di uno può compensare meno dell’altro, ma non perfettamente.

2.6.2 Sostituti perfetti

$$U = ax + by$$

Esempio**Due marche di acqua identiche**

Se due marche di acqua minerale sono percepite come identiche, il consumatore può considerarle perfetti sostituti. In questo caso conta solo la quantità totale “equivalente” dei due beni.

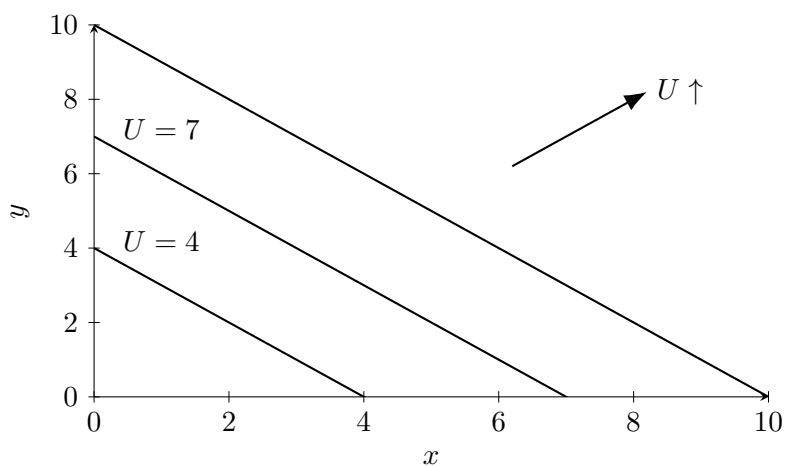


Figura 2.2: Sostituti perfetti: curve di indifferenza lineari (MRS costante).

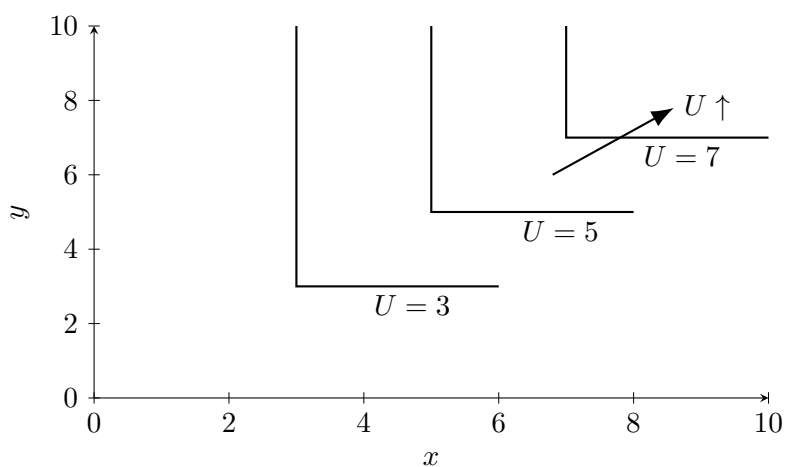


Figura 2.3: Complementi perfetti: curve a L (beni in proporzioni fisse).

2.6.3 Complementi perfetti

$$U = \min\{x, y\}$$

Esempio

Scarpe sinistre e scarpe destre

Una scarpa sinistra e una scarpa destra sono beni complementi perfetti: avere molte scarpe sinistre in più, senza scarpe destre aggiuntive, non aumenta l'utilità.

2.7 Utilità marginali e MRS

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad MU_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Definizione 2.3.

$$\text{MRS}(x, y) = -\left. \frac{dy}{dx} \right|_{dU=0} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

Esempio Cobb-Douglas $U = \sqrt{xy}$:

$$MU_x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad MRS = \frac{y}{x}$$

Intuizione economica

$MRS=2 \implies$ disposto a cedere 2 birre per 1 pizza mantenendo utilità costante.

Idea chiave

All'ottimo: $MRS = \frac{p_x}{p_y}$.

Esempio

Mobilità urbana: Uber e autobus

Se un consumatore è disposto a rinunciare a due corse in autobus per ottenere una corsa in Uber mantenendo invariata la soddisfazione, il suo MRS in quel punto è pari a 2. Il MRS misura quindi il trade-off soggettivo tra i due beni.

2.8 Esercizi

Esercizio 2.1.

Calcolare il MRS per $U = x^2y$.

Esercizio 2.2.

Verificare che $U = xy$ e $V = 2xy + 5$ rappresentano le stesse preferenze.

Esercizio 2.3.

Spiegare perché la convessità implica un MRS decrescente.

Esercizio 2.4.

Data $B = 12 - 0.25A$: (i) trova le intercette, (ii) interpreta la pendenza come costo opportunità.

Esercizio 2.5.

Spiega con parole tue perché la monotonicità implica pendenza negativa delle curve di indifferenza.

Esercizio 2.6.

Per $U(x, y) = x^{0.4}y^{0.6}$ calcola MU_x , MU_y e il MRS.

Da sapere per l'esame

1. spiegare scarsità, trade-off, costo opportunità e sunk costs con esempi;
2. leggere e interpretare pendenza e intercette di una retta (FPP e, tra poco, vincolo di bilancio);
3. calcolare derivate e derivate parziali in casi semplici;
4. definire preferenze e assiomi (completezza, transitività, monotonicità, convessità);
5. disegnare curve di indifferenza per Cobb-Douglas, sostituti e complementi;
6. calcolare MU_x , MU_y e $MRS = \frac{MU_x}{MU_y}$;
7. interpretare il MRS come disponibilità a scambiare beni a utilità costante.

Capitolo 3

Vincolo di bilancio e scelta ottima

3.1 Il problema economico

Il consumatore ha preferenze descritte da una funzione di utilità $U(x, y)$ e dalle relative curve di indifferenza. Vorrebbe consumare il più possibile di entrambi i beni, ma ha un reddito limitato e deve pagare prezzi di mercato.

Le domande fondamentali sono:

- quali panieri (x, y) sono *accessibili*?
- quale paniere *sceglierà* tra quelli accessibili?

A queste due domande rispondono, rispettivamente, il *vincolo di bilancio* e la *scelta ottima* del consumatore.

Esempio

Studente con budget mensile

Uno studente ha un budget mensile limitato e deve decidere come dividerlo tra libri, trasporti, cibo e tempo libero. Anche se vorrebbe consumare di più di tutti i beni, il reddito disponibile limita i panieri accessibili.

3.2 Vincolo di bilancio

Siano dati:

- $p_x > 0$: prezzo unitario del bene x ;
- $p_y > 0$: prezzo unitario del bene y ;
- $M > 0$: reddito disponibile del consumatore;
- $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$: quantità acquistate dei due beni.

Definizione 3.1 (Vincolo di bilancio).

La spesa totale del consumatore non può superare il reddito disponibile:

$$p_x x + p_y y \leq M.$$

L'insieme di panieri che soddisfano il vincolo è detto *insieme di bilancio*:

$$B(M, p_x, p_y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : p_x x + p_y y \leq M\}.$$

Definizione 3.2 (Retta di bilancio).

La *retta di bilancio* è l'insieme di panieri che esauriscono esattamente il reddito:

$$p_x x + p_y y = M.$$

Risolvendola rispetto a y otteniamo la forma esplicita:

$$y = \frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} x.$$

Intercette e pendenza

Dalla forma esplicita si ricavano facilmente:

- **intercetta verticale:** $y = M/p_y$ (quando $x = 0$);
- **intercetta orizzontale:** $x = M/p_x$ (quando $y = 0$);
- **pendenza:** $-\frac{p_x}{p_y}$.

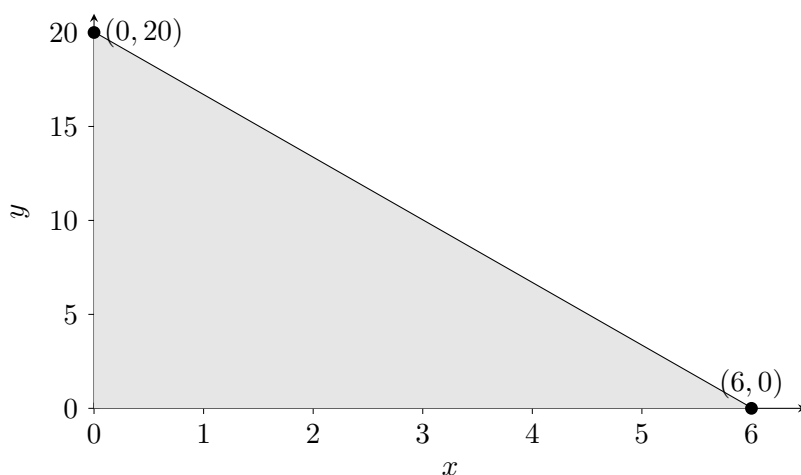


Figura 3.1: Retta di bilancio e insieme di bilancio per $M = 60$, $p_x = 10$, $p_y = 3$.

La retta di bilancio rappresenta le combinazioni che esauriscono il reddito; l'area sottostante costituisce l'insieme di bilancio, cioè l'insieme dei panieri accessibili.

Intuizione economica

La pendenza $-\frac{p_x}{p_y}$ misura il *tasso di sostituzione di mercato*: quante unità di y devo rinunciare per comprare 1 unità in più di x .

Esempio

Caffè e panini in pausa pranzo

Se un lavoratore ha 15 euro per la pausa pranzo, può acquistare diverse combinazioni di caffè e panini. Il vincolo di bilancio elenca tutte le combinazioni acquistabili con quel reddito e quei prezzi.

3.3 Insieme di bilancio

Definizione 3.3 (Insieme di bilancio).

L'insieme di bilancio è l'insieme di tutti i panieri accessibili al consumatore:

$$B(M, p_x, p_y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : p_x x + p_y y \leq M\}.$$

Osservazione 3.1.

Geometricamente $B(M, p_x, p_y)$ è un triangolo nel primo quadrante con vertici $(0, 0)$, $(M/p_x, 0)$ e $(0, M/p_y)$. La frontiera è la retta di bilancio, l'interno contiene i panieri che non esauriscono il reddito.

Proposizione 3.1 (Perché all'ottimo si spende tutto il reddito). *Se le preferenze sono monotone ("più è meglio"), allora in un paniere ottimo vale*

$$p_x x + p_y y = M.$$

Idea della dimostrazione

Se in un presunto ottimo avessimo $p_x x + p_y y < M$, resterebbe reddito non speso. Poiché $p_x, p_y > 0$, potremmo aumentare almeno uno dei due beni restando nel vincolo, ottenendo un paniere strettamente preferito per monotonicità: contraddizione.

Proposizione 3.2 (Proprietà dell'insieme di bilancio). *Per ogni $M > 0$ e $p_x, p_y > 0$ l'insieme di bilancio $B(M, p_x, p_y)$ è convesso.*

Idea della dimostrazione

Se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono accessibili, allora $p_x x_i + p_y y_i \leq M$ per $i = 1, 2$. Per ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$p_x(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + p_y(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) = \lambda(p_x x_1 + p_y y_1) + (1 - \lambda)(p_x x_2 + p_y y_2) \leq M,$$

quindi anche la media convessa appartiene a $B(M, p_x, p_y)$.

3.4 Variazioni di reddito e prezzi

3.4.1 Variazioni del reddito

Se il reddito passa da M a $M' > M$ (con prezzi costanti), la nuova retta di bilancio è

$$y = \frac{M'}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} x.$$

La pendenza è invariata, mentre le intercette aumentano: la retta si sposta parallelamente verso l'esterno.

Se $M'' < M$, la retta si sposta parallelamente verso l'interno.

Un aumento del reddito genera uno spostamento parallelo verso l'esterno, mentre una riduzione lo sposta verso l'interno; il trade-off di mercato rimane invariato.

Idea chiave

Il reddito cambia la *dimensione* dell'insieme di bilancio ma non il trade-off di mercato p_x/p_y .

Esempio**Borsa di studio**

Se uno studente riceve una borsa di studio, il suo reddito disponibile aumenta. A parità di prezzi, la retta di bilancio si sposta parallelamente verso l'esterno: può permettersi più di entrambi i beni.

3.4.2 Variazioni dei prezzi

Se aumenta solo p_x (con M e p_y costanti), l'intercetta verticale M/p_y resta invariata, mentre l'intercetta orizzontale M/p_x diminuisce e la retta ruota verso l'interno attorno al punto $(0, M/p_y)$.

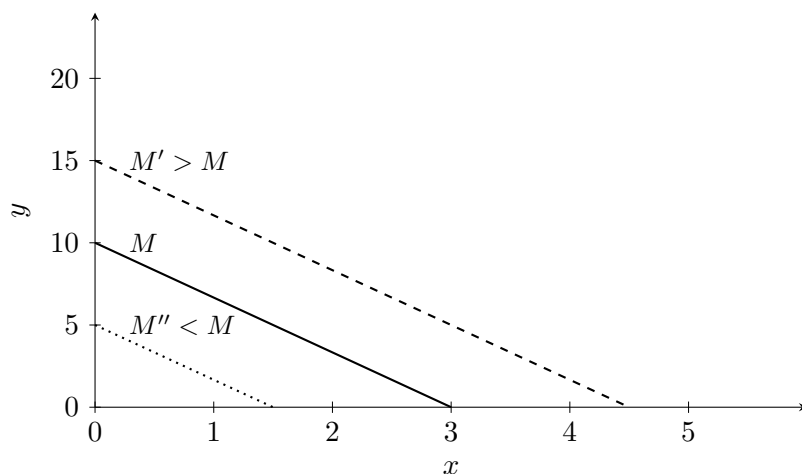


Figura 3.2: Variazioni del reddito: la retta di bilancio si sposta parallelamente (pendenza invariata).

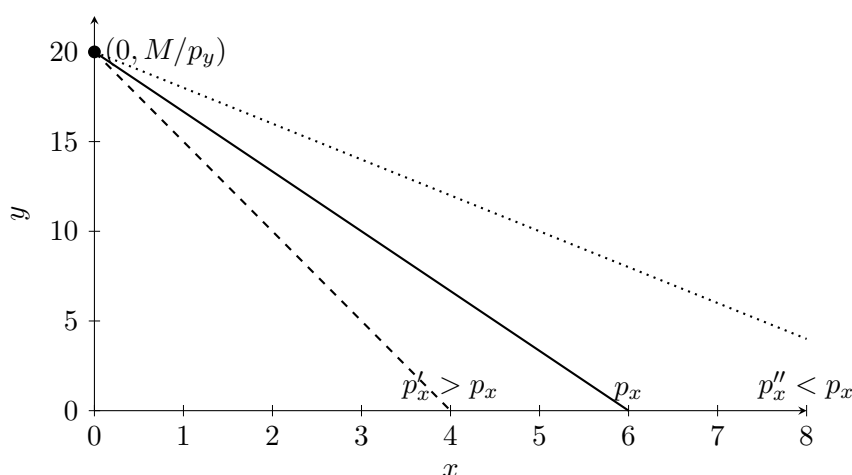


Figura 3.3: Variazione di p_x con M e p_y fissi: la retta ruota attorno all'intercetta verticale.

Una variazione del prezzo di un bene genera una rotazione della retta di bilancio attorno all'intercetta del bene il cui prezzo non è cambiato.

Se diminuisce p_x , la retta ruota verso l'esterno attorno allo stesso punto.

Variazioni di p_y generano rotazioni analoghe attorno all'intercetta orizzontale $(M/p_x, 0)$.

Esempio

Sconto sugli abbonamenti ai mezzi pubblici

Se il prezzo dell'abbonamento ai mezzi pubblici diminuisce, il consumatore può acquistarne di più a parità di reddito, oppure liberare risorse per altri beni. Nel grafico, il vincolo ruota verso l'esterno attorno all'intercetta dell'altro bene.

3.4.3 Inflazione proporzionale

Proposizione 3.3 (Omogeneità di grado zero). *Se moltiplichiamo simultaneamente (M, p_x, p_y) per uno stesso fattore $\lambda > 0$, l'insieme di bilancio non cambia:*

$$B(\lambda M, \lambda p_x, \lambda p_y) = B(M, p_x, p_y).$$

Idea della dimostrazione

La condizione $\lambda p_x x + \lambda p_y y \leq \lambda M$ è equivalente (dividendo per λ) a $p_x x + p_y y \leq M$.

Intuizione economica

Un'inflazione proporzionale (prezzi e reddito che crescono nella stessa misura) non cambia le possibilità reali di consumo: contano solo prezzi e reddito *relativi*.

3.5 Dalla fattibilità alla scelta

Finora abbiamo descritto *quali panieri sono accessibili*. Ora introduciamo il problema decisionale: *dato ciò che è accessibile, quale paniere massimizza l'utilità?*

3.6 Scelta ottima del consumatore

Il problema del consumatore è una massimizzazione vincolata:

$$\max_{x,y \geq 0} U(x,y) \quad \text{soggetto a} \quad p_x x + p_y y = M.$$

3.6.1 Soluzione grafica e condizione di tangenza

Graficamente, il consumatore cerca la curva di indifferenza più alta che interseca l'insieme di bilancio. In un ottimo interno (x^*, y^*) la curva di indifferenza è tangente alla retta di bilancio.

Definizione 3.4 (Condizione di tangenza).

In un ottimo interno si ha

$$MRS(x^*, y^*) = \frac{p_x}{p_y},$$

cioè

$$\frac{MU_x(x^*, y^*)}{MU_y(x^*, y^*)} = \frac{p_x}{p_y}.$$

Equivalente:

$$\frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y},$$

ossia l'utilità marginale per euro è uguale per entrambi i beni.

L'ottimo interno si verifica nel punto in cui la curva di indifferenza più elevata accessibile è tangente alla retta di bilancio: in tale punto vale $MRS = p_x/p_y$.

Intuizione economica

Se $MU_x/p_x > MU_y/p_y$, 1 euro speso in x rende più utilità che in y : conviene sostituire y con x fino a che le due utilità marginali per euro si uguagliano.

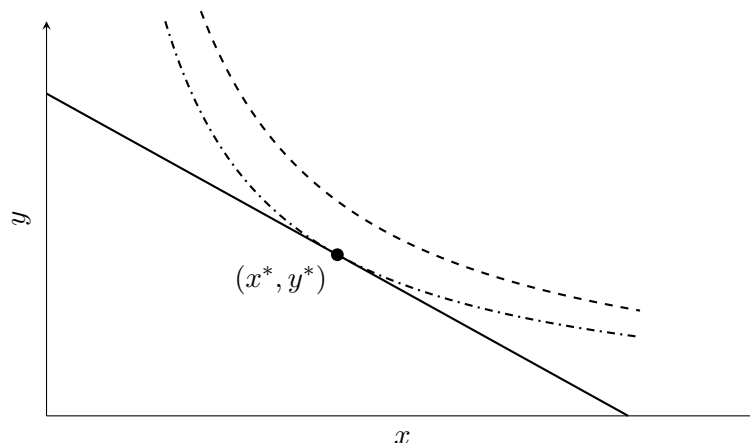


Figura 3.4: Ottimo interno: la curva di indifferenza è tangente alla retta di bilancio.

Idea chiave

Tre casi possibili:

1. **Ottimo interno:** $x^* > 0$, $y^* > 0$ e $MRS(x^*, y^*) = \frac{p_x}{p_y}$.
2. **Angolo su x :** $y^* = 0$ e l'ottimo sta sull'asse x (tipicamente in $(M/p_x, 0)$ se le preferenze lo rendono conveniente).
3. **Angolo su y :** $x^* = 0$ e l'ottimo sta sull'asse y (tipicamente in $(0, M/p_y)$).

La tangenza è una condizione necessaria solo nel caso interno; con soluzioni d'angolo bisogna valutare direttamente i panieri estremi consentiti.

Esempio

Scelta tra Uber e autobus

Un consumatore sceglie quante corse in Uber e quanti abbonamenti autobus acquistare. L'ottimo dipende da:

- preferenze (comodità vs risparmio),
- prezzi,
- reddito.

Il paniere ottimo è quello che massimizza utilità tra tutti quelli accessibili.

3.7 Metodo della sostituzione

Un primo metodo per risolvere il problema è sostituire il vincolo nella funzione di utilità.

Metodo della sostituzione

1. Si risolve il vincolo per una variabile, ad esempio $y = \frac{M - p_x x}{p_y}$.
2. Si sostituisce in $U(x, y)$ ottenendo $\tilde{U}(x) = U(x, \frac{M - p_x x}{p_y})$.
3. Si massimizza $\tilde{U}(x)$ rispetto a x con $\tilde{U}'(x) = 0$ e si usa la CSO.
4. Si ricava y^* dal vincolo di bilancio.

3.8 Metodo di Lagrange

Il metodo standard in microeconomia usa il moltiplicatore di Lagrange.

Lagrangiana

Si definisce

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) - \lambda(p_x x + p_y y - M).$$

Le condizioni del primo ordine sono

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = MU_x - \lambda p_x = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = MU_y - \lambda p_y = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = M - p_x x - p_y y = 0.$$

Dalle prime due equazioni si ottiene subito la condizione di tangenza:

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_x}{p_y}.$$

Osservazione 3.2 (Interpretazione di λ).

Dalla condizione $MU_x = \lambda p_x$ segue $\lambda = MU_x/p_x$: λ misura l'utilità marginale del reddito, cioè di 1 euro addizionale.

Esempio analitico

Consideriamo $U(x, y) = \ln x + 2 \ln y$ con $x, y > 0$ e vincolo $p_x x + p_y y = M$. Le CPO implicano

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{(1/x)}{(2/y)} = \frac{y}{2x} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y = \frac{2p_x}{p_y} x.$$

Sostituendo nel vincolo si ottiene che il consumatore spende 1/3 del reddito in x e 2/3 in y (quote determinate dai “pesi” della funzione).

3.9 Soluzione Cobb–Douglas

Consideriamo una funzione di utilità Cobb–Douglas

$$U(x, y) = x^\alpha y^\beta, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Proposizione 3.4 (Scelta ottima Cobb–Douglas). *Dato il vincolo $p_x x + p_y y = M$, la soluzione interna è*

$$x^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{M}{p_x}, \quad y^* = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{M}{p_y}.$$

Idea della dimostrazione

Calcoliamo le utilità marginali: $MU_x = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta$, $MU_y = \beta x^\alpha y^{\beta-1}$. La condizione $MU_x/MU_y = p_x/p_y$ implica

$$\frac{\alpha}{\beta} \frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y = \frac{\beta}{\alpha} \frac{p_x}{p_y} x.$$

Sostituendo nel vincolo e risolvendo si ottengono le espressioni per x^* e y^* .

Intuizione economica

Con preferenze Cobb–Douglas, il consumatore spende una quota fissa del reddito in ciascun bene: $\alpha/(\alpha + \beta)$ in x , $\beta/(\alpha + \beta)$ in y .

3.10 Soluzioni d'angolo

Finora abbiamo considerato ottimi interni. In alcuni casi (soprattutto con sostituti perfetti) l'ottimo è su un'intercetta della retta di bilancio.

Definizione 3.5 (Soluzione d'angolo).

Si ha una soluzione d'angolo se in ottimo il consumatore sceglie $x^* = 0$ oppure $y^* = 0$, cioè tutto il reddito è speso in un solo bene.

In altre parole, quando il trade-off soggettivo differisce sistematicamente dal trade-off di mercato, l'ottimo può trovarsi in un estremo del vincolo di bilancio.

Esempio analitico

Sostituti perfetti

Se $U(x, y) = ax + by$ con $a, b > 0$, allora $MRS = a/b$ è costante. Confrontando MRS con p_x/p_y :

- se $\frac{a}{b} > \frac{p_x}{p_y}$ l'ottimo è $(M/p_x, 0)$ (solo x);
- se $\frac{a}{b} < \frac{p_x}{p_y}$ l'ottimo è $(0, M/p_y)$ (solo y);
- se $\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y}$ ogni paniere sulla retta è ottimo.

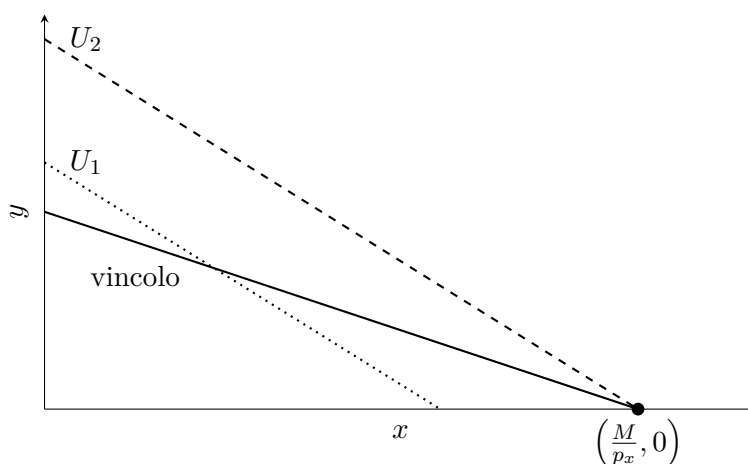


Figura 3.5: Soluzione d'angolo (sostituti perfetti): la curva di indifferenza più alta accessibile tocca il vincolo nell'estremo $(\frac{M}{p_x}, 0)$.

Esempio analitico**Complementi perfetti: proporzioni fisse**

Se $U(x, y) = \min\{ax, by\}$, il consumatore desidera i beni in proporzione fissa. In un ottimo vale

$$ax^* = by^*.$$

Idea della dimostrazione

Se $ax < by$, aumentando y non cambia U ; se $ax > by$, aumentando x non cambia U . Per evitare “sprechi” l’ottimo richiede uguaglianza al vertice: $ax = by$. Sostituendo $y = \frac{a}{b}x$ nel vincolo si ottiene la soluzione chiusa:

$$x^* = \frac{bM}{bp_x + ap_y}, \quad y^* = \frac{aM}{bp_x + ap_y}.$$

Idea chiave

La condizione di tangenza vale per ottimi interni. Con soluzioni d’angolo bisogna confrontare direttamente l’utilità ai vertici consentiti.

Esempio**Acqua del rubinetto e acqua in bottiglia**

Se il consumatore considera l’acqua del rubinetto e quella in bottiglia quasi perfetti sostituti, ma l’acqua del rubinetto è molto più economica, può scegliere una soluzione d’angolo spendendo tutto nel bene relativamente più conveniente.

3.11 Esercizi

Esercizio 3.1.

Dato $M = 60$, $p_x = 10$, $p_y = 3$:

1. scrivi il vincolo di bilancio e trova intercette e pendenza;
2. determina se i panieri $(3, 10)$, $(2, 8)$ e $(5, 15)$ sono accessibili;
3. rappresenta graficamente l’insieme di bilancio.

Esercizio 3.2.

Mostra graficamente e analiticamente l’effetto di un aumento del reddito da M a $1.5M$ a prezzi fissi. Cosa succede alle intercette e alla pendenza?

Esercizio 3.3.

Per $U(x, y) = x^{0.5}y^{0.5}$, $p_x = 10$, $p_y = 5$, $M = 100$:

1. risolvi il problema con il metodo della sostituzione;
2. risolvi lo stesso problema con il metodo di Lagrange;
3. verifica che in entrambi i casi ottieni $x^* = 5$, $y^* = 10$.

Esercizio 3.4.

Per $U(x, y) = 2x + 3y$, $p_x = 5$, $p_y = 4$, $M = 100$:

1. calcola MRS e p_x/p_y ;

2. stabilisci se la soluzione è interna o d'angolo;
3. trova il paniere ottimo.

Da sapere per l'esame

1. scrivere e interpretare vincolo di bilancio, retta di bilancio e insieme di bilancio;
2. analizzare graficamente l'effetto di variazioni di reddito e prezzi;
3. formulare il problema di massimizzazione del consumatore;
4. usare metodo della sostituzione e Lagrange in casi semplici;
5. applicare la formula chiusa per funzioni Cobb–Douglas;
6. riconoscere quando la soluzione è interna o d'angolo.

Capitolo 4

Domanda individuale, statica comparata ed elasticità

4.1 Domanda Marshalliana (domanda individuale)

Nel capitolo precedente abbiamo risolto il problema del consumatore:

$$\max_{x,y \geq 0} U(x,y) \quad \text{s.t.} \quad p_x x + p_y y = M,$$

ottenendo, per ogni tripla (p_x, p_y, M) , un paniere ottimo (x^*, y^*) .

Definizione 4.1 (Domanda Marshalliana).

La *domanda Marshalliana* (o *ordinaria*) è la funzione che associa a prezzi e reddito la quantità ottimale scelta:

$$x^D = x^D(p_x, p_y, M), \quad y^D = y^D(p_x, p_y, M).$$

Intuizione economica

La domanda Marshalliana è semplicemente la **scelta ottima “vista come funzione”** dei parametri: se cambiano prezzi o reddito, cambiano i vincoli e quindi cambia l’ottimo.

Esempio analitico

Cobb–Douglas

Se $U(x,y) = x^\alpha y^\beta$ con $\alpha, \beta > 0$, la scelta ottima interna è:

$$x^D(p_x, p_y, M) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{M}{p_x}, \quad y^D(p_x, p_y, M) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{M}{p_y}.$$

Osservazione 4.1 (Omogeneità di grado zero).

Per ogni $\lambda > 0$ vale:

$$x^D(\lambda p_x, \lambda p_y, \lambda M) = x^D(p_x, p_y, M),$$

cioè contano solo prezzi e reddito *relativi*.

Esempio

Domanda di pizza

La domanda Marshalliana di pizza indica quante pizze un consumatore acquista per ogni combinazione di prezzo della pizza, prezzo degli altri beni e reddito. Non è una semplice preferenza: è la scelta ottima effettiva, dati i vincoli.

4.2 Curva di domanda e statica comparata

Definizione 4.2 (Curva di domanda).

La *curva di domanda* del bene x rappresenta la relazione tra p_x e x^D mantenendo fissi p_y e M .

Idea chiave

- Se cambia $p_x \Rightarrow$ **movimento lungo** la curva di domanda di x .
- Se cambia M o $p_y \Rightarrow$ **spostamento** della curva di domanda di x .

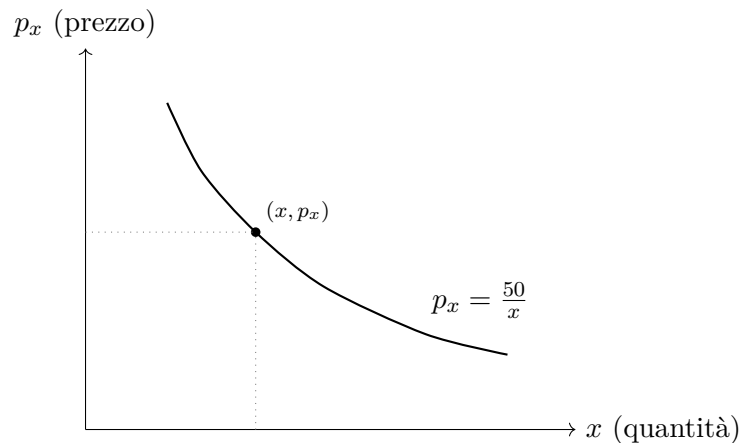


Figura 4.1: Curva di domanda (convenzione Marshall): prezzo p_x sull'asse verticale e quantità x sull'asse orizzontale.

Esempio

Abbonamenti streaming

Se il prezzo di Netflix aumenta, un consumatore può ridurre il numero di mesi acquistati: questo è un movimento lungo la curva di domanda. Se invece aumenta il reddito, l'intera curva di domanda può spostarsi.

4.2.1 Prezzo dell'altro bene: sostituti e complementi

Definizione 4.3 (Sostituti e complementi).

Sia $x^D = x^D(p_x, p_y, M)$ la domanda Marshalliana. Il segno di

$$\frac{\partial x^D}{\partial p_y}$$

determina la relazione tra i beni:

- **Sostituti** se $\frac{\partial x^D}{\partial p_y} > 0$;
- **Complementi** se $\frac{\partial x^D}{\partial p_y} < 0$.

Intuizione economica

Se y diventa più caro e x lo sostituisce, compro più x (sostituti). Se x e y “vanno insieme”, il rincaro di y riduce anche l'uso di x (complementi).

Esempio

Caffè e tè

Se il prezzo del tè aumenta e i consumatori comprano più caffè, i due beni si comportano come sostituti. Se invece aumenta il prezzo delle capsule e si riduce anche la domanda di macchine compatibili, i due beni si comportano come complementi.

4.3 ICC, curve di Engel e tipologie di beni

Definizione 4.4 (Curva reddito-consumo (ICC)).

La *curva reddito-consumo* (ICC) è il luogo dei panieri ottimi al variare del reddito M , mantenendo fissi i prezzi p_x e p_y .

Intuizione economica

La ICC è il “percorso” dell’ottimo nello spazio (x, y) quando il vincolo di bilancio si sposta parallelamente (a prezzi costanti) al variare del reddito.

Definizione 4.5 (Curva di Engel).

La *curva di Engel* descrive la relazione tra reddito e quantità domandata a prezzi fissati:

$$x^D = x^D(M; p_x, p_y).$$

Per convenzione si rappresenta M sull’asse verticale e x sull’asse orizzontale.

Definizione 4.6 (Beni normali e inferiori). • x è **bene normale** se

$$\frac{\partial x^D}{\partial M} > 0.$$

• x è **bene inferiore** se

$$\frac{\partial x^D}{\partial M} < 0.$$

Definizione 4.7 (Beni necessari e di lusso).

Un bene normale:

- è **necessario** se l’elasticità reddito soddisfa $0 < \varepsilon_M < 1$;
- è **di lusso** se $\varepsilon_M > 1$.

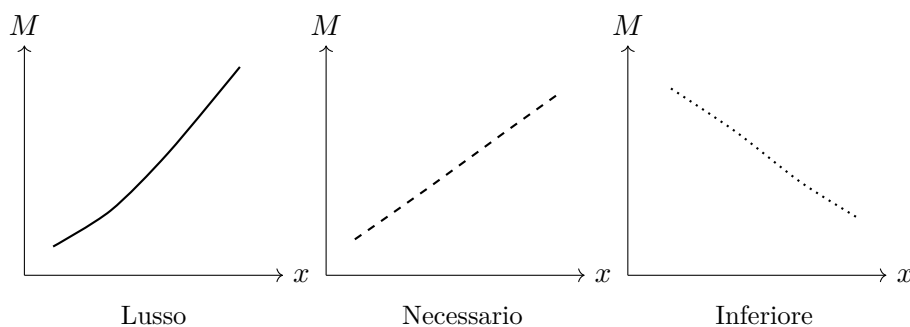


Figura 4.2: Curve di Engel: bene di lusso (convessa), necessario (più concava/lineare), inferiore (decescente).

Esempio

Beni necessari e beni di lusso

Quando il reddito di una famiglia cresce:

- la spesa per pane e pasta aumenta poco,
- la spesa per viaggi internazionali può aumentare molto.

Per questo i primi sono spesso beni necessari, i secondi beni di lusso.

4.4 Domanda compensata (Hicksiana) ed equazione di Slutsky

Definizione 4.8 (Domanda Hicksiana (compensata)).

La domanda Hicksiana $x^c(p_x, p_y, \bar{U})$ è la quantità del bene x che minimizza la spesa necessaria per raggiungere un livello di utilità prefissato \bar{U} :

$$\min_{x,y \geq 0} p_x x + p_y y \quad \text{s.t.} \quad U(x, y) \geq \bar{U}.$$

Idea chiave

- Marshalliana $x^D(\cdot)$: massimizza utilità con reddito fissato (M).
- Hicksiana $x^c(\cdot)$: minimizza spesa con utilità fissata (\bar{U}).

Definizione 4.9 (Effetto di sostituzione (ES) ed effetto reddito (ER)).

- **Effetto sostituzione (ES)**: variazione di x dovuta al cambiamento dei prezzi relativi, a *utilità costante*. Direzione: **sempre opposta** a Δp_x .

- **Effetto reddito (ER)**: variazione di x dovuta al cambiamento del potere d'acquisto reale. Direzione: dipende dal segno di $\frac{\partial x^D}{\partial M}$ (bene normale vs inferiore).

Equazione di Slutsky

$$\frac{\partial x^D}{\partial p_x} = \underbrace{\frac{\partial x^c}{\partial p_x}}_{\text{effetto sostituzione}} - \underbrace{x^D \frac{\partial x^D}{\partial M}}_{\text{effetto reddito}}.$$

Osservazione 4.2.

L'effetto di sostituzione $\frac{\partial x^c}{\partial p_x}$ è sempre negativo (per preferenze monotone e convesse), mentre il segno dell'effetto reddito dipende dalla natura del bene (normale o inferiore).

Osservazione 4.3 (Beni di Giffen).

Un bene di Giffen è un caso (teoricamente possibile ma raro) in cui

$$\frac{\partial x^D}{\partial p_x} > 0,$$

cioè un aumento del prezzo comporta un aumento della quantità domandata. Ciò accade quando l'effetto reddito (per un bene *fortemente inferiore* e con quota rilevante nel budget) domina in valore assoluto l'effetto di sostituzione.

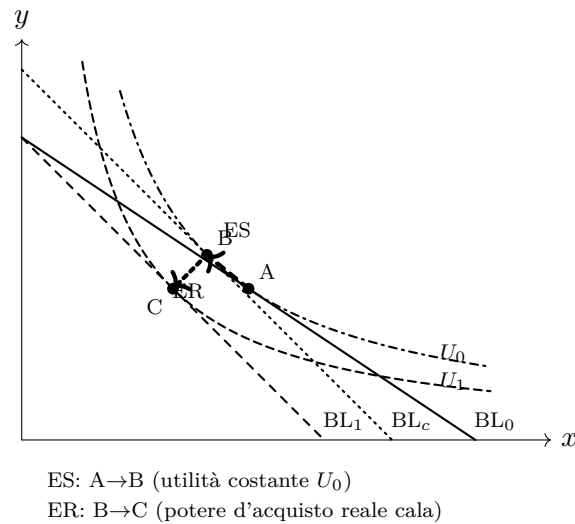


Figura 4.3: Decomposizione di Slutsky: p_x aumenta. ES (A→B) a utilità costante; ER (B→C) dovuto alla perdita di potere d'acquisto reale.

Esempio

Aumento del prezzo della benzina

Quando il prezzo della benzina aumenta:

- alcune persone usano di più il treno o l'autobus (**effetto sostituzione**),
- il loro potere d'acquisto reale diminuisce (**effetto reddito**).

La variazione totale della domanda di benzina è la somma di questi due effetti.

4.5 Curva prezzo-consumo e derivazione grafica della domanda

Definizione 4.10 (Curva prezzo-consumo (PCC)).

La *curva prezzo-consumo* (PCC) è il luogo dei panieri ottimi al variare di p_x , mantenendo fissi p_y e M .

Intuizione economica

La PCC è il “percorso” dell'ottimo nello spazio (x, y) quando ruota il vincolo di bilancio al variare di p_x . Proiettando i punti ottimi su (x, p_x) ottieni la curva di domanda.

Esempio

Prezzo degli smartphone

Se il prezzo degli smartphone diminuisce progressivamente, i panieri ottimi dei consumatori si spostano. La PCC raccoglie questi panieri ottimi; proiettandoli si ottiene la curva di domanda.

4.6 Elasticità della domanda

Le derivate come $\frac{\partial x^D}{\partial p_x}$ misurano variazioni in *unità fisiche* (kg, litri, pezzi). Per confrontare mercati e beni diversi si utilizza una misura *percentuale*: l'elasticità.

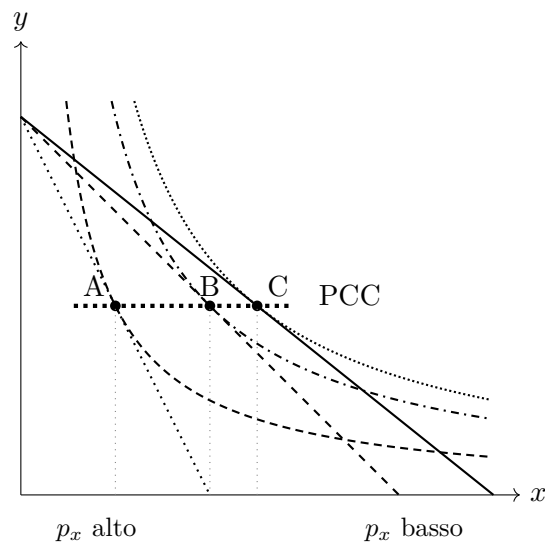


Figura 4.4: Curva prezzo-consumo (PCC): al diminuire di p_x l'intercetta orizzontale aumenta e l'ottimo si sposta lungo la PCC.

Definizione 4.11 (Elasticità prezzo della domanda (puntuale)).

L'elasticità prezzo della domanda è definita come

$$\varepsilon_P = \frac{\partial x^D}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x^D}.$$

Tipicamente $\varepsilon_P < 0$ (legge della domanda). Nella classificazione si usa spesso il valore assoluto $|\varepsilon_P|$.

Definizione 4.12 (Classificazione (in valore assoluto)).

- **Anelastica** se $|\varepsilon_P| < 1$;

- **Unitaria** se $|\varepsilon_P| = 1$;
- **Elastica** se $|\varepsilon_P| > 1$.

Definizione 4.13 (Elasticità reddito).

L'elasticità reddito della domanda è

$$\varepsilon_M = \frac{\partial x^D}{\partial M} \cdot \frac{M}{x^D}.$$

- $\varepsilon_M > 0$: bene normale;
- $\varepsilon_M < 0$: bene inferiore;
- $0 < \varepsilon_M < 1$: tipicamente bene necessario;
- $\varepsilon_M > 1$: tipicamente bene di lusso.

Definizione 4.14 (Elasticità incrociata (tra x e y)).

L'elasticità incrociata della domanda è

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial x^D}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{x^D}.$$

- $\varepsilon_{xy} > 0$: beni sostituti;
- $\varepsilon_{xy} < 0$: beni complementi;
- $\varepsilon_{xy} \approx 0$: beni quasi indipendenti.

Idea chiave

Per piccole variazioni percentuali:

$$\Delta x\% \approx \varepsilon_P \cdot \Delta p_x\%.$$

Intuizione economica

Se $|\varepsilon_P|$ è grande, la quantità reagisce molto al prezzo: la domanda è sensibile. Se è piccola, la quantità reagisce poco.

Esempio**Sigarette e farmaci essenziali**

Per beni come sigarette o alcuni farmaci essenziali, la quantità domandata reagisce poco al prezzo: la domanda tende a essere relativamente anelastica. Per beni come viaggi o ristoranti, la reazione può essere molto più forte.

4.7 Elasticità e ricavi totali

Definizione 4.15 (Ricavo totale).

Il *ricavo totale* derivante dalla vendita del bene x al prezzo unitario p_x è

$$RT(p_x) = p_x \cdot x(p_x).$$

dove $x(p_x)$ è la quantità domandata al prezzo p_x (a reddito e altri prezzi dati).

Proposizione 4.1 (Relazione elasticità–ricavi). *Sia ε_P l'elasticità prezzo della domanda:*

$$\varepsilon_P = \frac{dx}{dp_x} \frac{p_x}{x}.$$

Allora vale:

$$\frac{dRT}{dp_x} = x(1 + \varepsilon_P).$$

In particolare:

- se $|\varepsilon_P| > 1$ (domanda elastica), allora $p_x \uparrow \Rightarrow RT \downarrow$;
- se $|\varepsilon_P| < 1$ (domanda anelastica), allora $p_x \uparrow \Rightarrow RT \uparrow$;
- se $|\varepsilon_P| = 1$, allora $\frac{dRT}{dp_x} = 0$ (ricavo massimo localmente).

Idea della dimostrazione

Poiché $RT(p_x) = p_x x(p_x)$, per la regola di derivazione del prodotto:

$$\frac{dRT}{dp_x} = x + p_x \frac{dx}{dp_x}.$$

Raccogliendo x e usando la definizione di elasticità:

$$\frac{dRT}{dp_x} = x \left(1 + \frac{dx}{dp_x} \frac{p_x}{x} \right) = x(1 + \varepsilon_P).$$

Osservazione 4.4.

Per una domanda ordinaria $dx/dp_x < 0$, quindi $\varepsilon_P < 0$.

Esempio

Biglietti del cinema

Se la domanda di biglietti è elastica, un aumento del prezzo può ridurre molto il numero di spettatori e far diminuire i ricavi totali. Se invece la domanda è anelastica, l'aumento del prezzo può far crescere i ricavi.

4.8 Esercizi**Esercizio 4.1.**

Domanda Marshalliana: $x^D(p, M) = 20 - 2p + 0.1M$. Per $p = 5$ e $M = 100$:

1. calcola x^D ;
2. calcola $\frac{\partial x^D}{\partial p}$ e $\frac{\partial x^D}{\partial M}$;
3. usa Slutsky per ricavare $\frac{\partial x^c}{\partial p}$;
4. interpreta economicamente ES ed ER.

Esercizio 4.2.

Domanda lineare: $Q = 100 - 2P$.

1. calcola l'elasticità puntuale $\varepsilon(P)$;
2. valuta ε in $P = 10$ e $P = 40$ e classifica (elastica/anelastica);
3. trova il prezzo che massimizza i ricavi totali.

Esercizio 4.3.

Elasticità incrociata: la domanda di pizza è $x^D(p_x, p_y, M) = 20 - 2p_x + p_y + 0.01M$.

1. calcola $\frac{\partial x^D}{\partial p_y}$ e interpreta (sostituti o complementi);
2. calcola ε_{xy} in $p_y = 3$, $p_x = 5$, $M = 100$.

Da sapere per l'esame

1. definire domanda Marshalliana e curva di domanda;
2. distinguere movimento lungo la curva vs spostamento della curva;
3. usare ICC/Engel per classificare beni: normali/inferiori e necessari/lusso;
4. spiegare e rappresentare ES ed ER e leggere la decomposizione grafica;
5. scrivere e interpretare l'equazione di Slutsky (segni e casi);
6. calcolare e interpretare elasticità prezzo, reddito e incrociata;
7. collegare elasticità prezzo a ricavi totali e decisioni di pricing (RT massimo quando $|\varepsilon| = 1$);
8. riconoscere quando può emergere un comportamento di tipo Giffen (condizioni necessarie).

Domande ed esercizi

Domande a risposta multipla

1. Quale affermazione è corretta?

- A Il costo opportunità coincide sempre con la spesa monetaria osservata.
- B Un costo irrecuperabile (*sunk cost*) dovrebbe influenzare la scelta ottimale futura.
- C Il costo opportunità è il valore della migliore alternativa sacrificata.
- D L'analisi marginale riguarda solo scelte discrete (0/1).

2. Per una funzione $f(x)$ differenziabile, una condizione sufficiente per un massimo locale interno in x^* è:

- A $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) > 0$;
- B $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) < 0$;
- C $f'(x^*) > 0$ e $f''(x^*) = 0$;
- D $f'(x^*) < 0$ e $f''(x^*) = 0$.

3. La **transitività** della relazione \succeq significa che:

- A per ogni A, B vale $A \succeq B$ oppure $B \succeq A$;
- B se $A \succeq B$ e $B \succeq C$, allora $A \succeq C$;
- C se $A \succeq B$, allora $A \succ B$;
- D esiste una funzione U che rappresenta le preferenze.

4. Sotto monotonicità (più è meglio) e razionalità, una proprietà corretta delle curve di indifferenza è:

- A possono intersecarsi senza creare contraddizioni;
- B hanno sempre pendenza positiva;
- C sono tipicamente decrescenti (pendenza negativa);
- D sono sempre rette.

5. In un ottimo interno del consumatore vale:

A $\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_y}{p_x};$

B $\frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y};$

C $MU_x = MU_y$ sempre;

D $x^* = 0$ oppure $y^* = 0$ necessariamente.

Esercizi e domande aperte

1. Considera le funzioni $U(x, y) = xy$ e $V(x, y) = 2xy + 10$.

- Mostra (formalmente) se rappresentano le stesse preferenze.
- Elenca quattro proprietà tipiche delle curve di indifferenza sotto monotonicità e convessità e spiega in una riga ciascuna.
- Calcola il MRS per $U(x, y) = xy$ e interpretalo economicamente.

2. Sia $U(x, y) = x^{0.5}y^{0.5}$, $p_x = 10$, $p_y = 5$, $M = 100$.

- Risolvi l'ottimo con il metodo di sostituzione.
- Risolvi lo stesso problema con la Lagrangiana e interpreta λ .
- Verifica la condizione di tangenza $MRS = p_x/p_y$ nel paniere ottimo.

3. Spiega in modo chiaro (massimo 10 righe) le differenze tra:

- PCC e curva di domanda di x ;
- ICC e curva di Engel.

Poi rispondi:

- Se lungo la ICC, all'aumentare di M la quantità ottima di x diminuisce, che tipo di bene è x ?
- Se la curva di Engel è concava (in x rispetto a M), cosa suggerisce sull'elasticità reddito al crescere di M ?

Parte II

Teoria del Produttore

Capitolo 5

Tecnologia e Produzione

5.1 Il problema del produttore

Il consumatore sceglie il paniere che massimizza l'utilità dato un vincolo di bilancio. L'impresa affronta un problema speculare: dato l'obiettivo di produrre un certo output, deve capire *come* combinare gli input a disposizione.

Idea chiave

Come nel problema del consumatore il vincolo era il **budget**, nel problema del produttore il vincolo è la **tecnologia**. L'impresa vuole produrre al massimo dato ciò che è tecnicamente possibile, oppure produrre un dato output al costo minimo.

Le domande fondamentali sono:

- quante unità di output si possono ottenere da una data combinazione di input?
- quale combinazione di input minimizza il costo di produrre un dato output?

Definizione 5.1 (Tecnologia).

La tecnologia descrive i vincoli tecnici che determinano come gli input possono essere trasformati in output.

Definizione 5.2 (Funzione di produzione).

La funzione di produzione rappresenta la quantità massima di output ottenibile da ogni combinazione di input:

$$Q = f(L, K)$$

dove L è il lavoro, K è il capitale e Q è l'output prodotto.

Esempio

Call center

L'output è il numero di chiamate gestite al giorno. L = numero di operatori; K = postazioni, linee e software. Se il numero di postazioni è fisso, aggiungere operatori non aumenta proporzionalmente le chiamate gestite: la tecnologia crea un *collo di bottiglia*.

5.2 Breve periodo e lungo periodo

Definizione 5.3 (Breve periodo).

Il breve periodo è l'orizzonte temporale in cui almeno un fattore produttivo è fisso (tipicamente il

capitale K). L'impresa può variare solo i fattori variabili.

Definizione 5.4 (Lungo periodo).

Il lungo periodo è l'orizzonte temporale in cui tutti i fattori produttivi sono variabili. L'impresa può scegliere liberamente la combinazione (L, K) .

Osservazione 5.1.

La distinzione non riguarda una durata temporale fissa ("3 mesi vs 3 anni"). Dipende dalla natura del settore: una banca può cambiare il numero di sportelli in tempi diversi rispetto a una centrale elettrica che modifica la capacità installata.

5.3 Prodotto marginale e rendimenti marginali decrescenti

Definizione 5.5 (Prodotto marginale del lavoro).

$$MPL = \frac{\partial f(L, K)}{\partial L}$$

Misura quanto aumenta l'output quando il lavoro aumenta di una unità, mantenendo fisso il capitale.

Definizione 5.6 (Prodotto marginale del capitale).

$$MPK = \frac{\partial f(L, K)}{\partial K}$$

Misura quanto aumenta l'output quando il capitale aumenta di una unità, mantenendo fisso il lavoro.

Definizione 5.7 (Rendimenti marginali decrescenti).

Nel breve periodo (con K fisso) si hanno rendimenti marginali decrescenti quando ogni unità aggiuntiva di lavoro genera un incremento di output via via minore:

$$\frac{\partial MPL}{\partial L} = \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} < 0.$$

Esempio

Cucina di un ristorante

L = cuochi; K = fornelli e spazio cucina (fissi nel breve periodo). Il primo cuoco aggiuntivo aumenta molto la produzione. Il decimo, in una cucina congestionata, porta un contributo molto minore. Ogni cuoco in più genera un beneficio decrescente: rendimenti marginali decrescenti.

5.4 Prodotto totale, medio e marginale

Le tre curve fondamentali del breve periodo sono strettamente collegate tra loro.

Definizione 5.8 (Prodotto totale, medio e marginale). • **Prodotto totale:** $TP = Q = f(L, \bar{K})$.

- **Prodotto medio:** $APL = Q/L$ (output per unità di lavoro).
- **Prodotto marginale:** $MPL = \partial Q / \partial L$ (contributo dell'ultima unità di L).

Idea chiave

La relazione tra MPL e APL è analoga a quella tra MC e AC per i costi:

- se $MPL > APL$, allora APL è crescente;
- se $MPL < APL$, allora APL è decrescente;
- se $MPL = APL$, allora APL è al suo massimo.

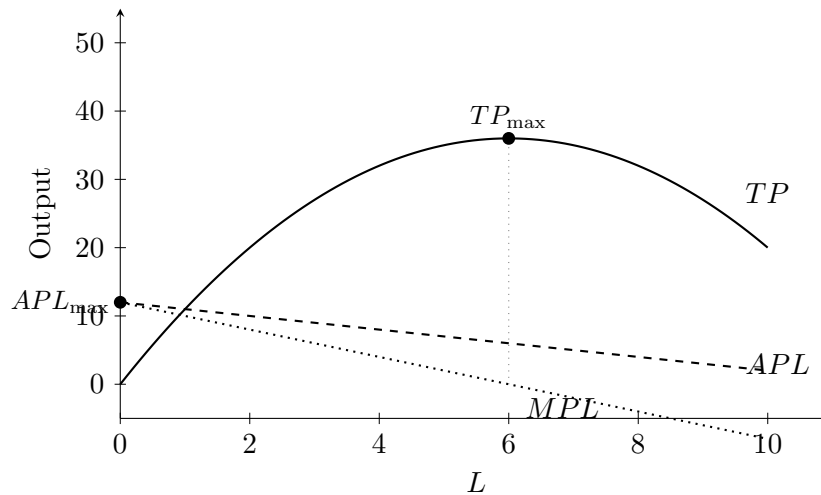


Figura 5.1: Prodotto totale, medio e marginale per $f(L, \bar{K}) = 12L - L^2$. Il TP raggiunge il massimo dove $MPL = 0$; APL è massimo dove $MPL = APL$.

Intuizione economica

La logica della media dei voti: se il prossimo voto è sopra la media, la media sale. Se è sotto, scende. La media raggiunge il massimo quando coincide col voto marginale.

5.5 Rendimenti di scala

I rendimenti di scala descrivono cosa accade all'output quando **tutti** gli input aumentano proporzionalmente. È una proprietà del lungo periodo.

Definizione 5.9 (Rendimenti di scala).

Confrontiamo $f(tL, tK)$ con $t \cdot f(L, K)$ per $t > 1$:

- **Rendimenti crescenti** se $f(tL, tK) > t f(L, K)$;
- **Rendimenti costanti** se $f(tL, tK) = t f(L, K)$;
- **Rendimenti decrescenti** se $f(tL, tK) < t f(L, K)$.

Osservazione 5.2 (Cobb–Douglas).

Per $f(L, K) = AL^\alpha K^\beta$:

$$f(tL, tK) = A(tL)^\alpha (tK)^\beta = t^{\alpha+\beta} AL^\alpha K^\beta = t^{\alpha+\beta} f(L, K).$$

Quindi: rendimenti crescenti se $\alpha + \beta > 1$, costanti se $\alpha + \beta = 1$, decrescenti se $\alpha + \beta < 1$.

Esempio**Piattaforma e-commerce**

Raddoppiare magazzini, software e personale può più che raddoppiare gli ordini gestiti grazie a processi standardizzati, costi fissi distribuiti su più vendite e logistica più efficiente. Questo configura rendimenti crescenti.

5.6 Esercizi**Esercizio 5.1.**

Sia $Q = L^{0.5}K^{0.5}$.

- a) Calcola MPL e MPK .
- b) Classifica i rendimenti di scala.
- c) Verifica che MPL è decrescente in L (con K fisso).

Esercizio 5.2.

Un'impresa ha $Q = 10L - L^2$ (breve periodo, K fisso).

- a) Calcola MPL e APL .
- b) Verifica che APL è massimo quando $MPL = APL$.
- c) Trova il livello di L per cui $MPL = 0$.

Esercizio 5.3.

Data $Q = L^{0.7}K^{0.4}$, classifica i rendimenti di scala e calcola MPL e MPK .

Esercizio 5.4.

Un'impresa raddoppia tutti gli input e osserva che l'output passa da 100 a 180. Che tipo di rendimenti di scala osserva? Fornisci una possibile spiegazione economica.

Da sapere per l'esame

1. definire tecnologia e funzione di produzione;
2. distinguere breve periodo e lungo periodo;
3. calcolare e interpretare MPL , MPK e APL ;
4. spiegare rendimenti marginali decrescenti e illustrarli graficamente;
5. descrivere la relazione tra MPL e APL (quando APL sale/scende/è massimo);
6. classificare i rendimenti di scala con la definizione e con la formula Cobb–Douglas ($\alpha + \beta$).

Capitolo 6

Isoquanti, MRTS e Tipi di Tecnologia

6.1 Isoquanti

Definizione 6.1 (Isoquanto).

Un isoquanto è l'insieme delle combinazioni di input (L, K) che producono lo stesso livello di output:

$$\{(L, K) \in \mathbb{R}_+^2 : f(L, K) = \bar{Q}\}.$$

Intuizione economica

Gli isoquanti sono l'analogo delle **curve di indifferenza** del consumatore, ma rappresentano livelli di **output** invece di utilità. Analogamente, un isoquanto più lontano dall'origine corrisponde a un livello di output più elevato.

Proprietà degli isoquanti

Le proprietà derivano direttamente dalle ipotesi sulla tecnologia (analoghe agli assiomi delle preferenze del consumatore):

1. **Pendenza negativa:** per mantenere Q costante, se aumenta L occorre ridurre K (e viceversa), purché entrambi i fattori abbiano prodotto marginale positivo.
2. **Non si intersecano:** per transitività (se si intersecassero, lo stesso paniere di input produrrebbe due output diversi, contraddizione).
3. **Convessità verso l'origine:** riflette il fatto che il MRTS è decrescente (la sostituibilità tra fattori si riduce man mano che si usa più di uno di essi).
4. **Isoquanti più alti a nord-est:** più input produce più output.

6.2 Saggio marginale di sostituzione tecnica (MRTS)

Definizione 6.2 (MRTS).

Lungo un isoquanto vale $dQ = MPL dL + MPK dK = 0$, da cui:

$$MRTS_{LK} = - \left. \frac{dK}{dL} \right|_{dQ=0} = \frac{MPL}{MPK}.$$

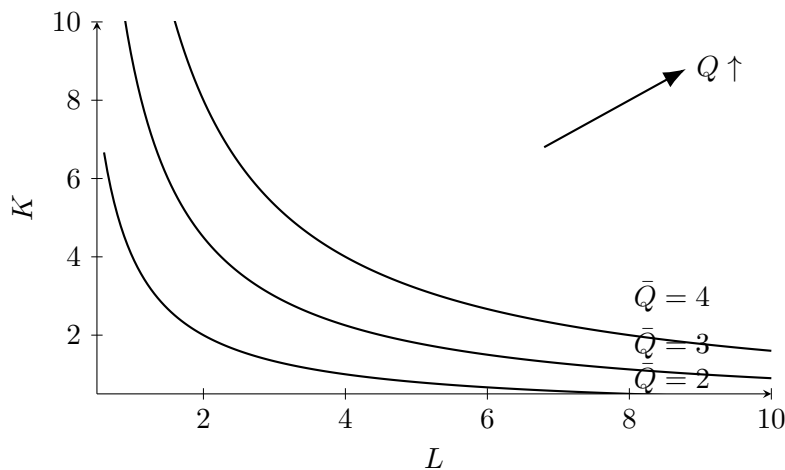


Figura 6.1: Isoquanti Cobb–Douglas $Q = \sqrt{LK}$: convessi verso l’origine, analoghi alle curve di indifferenza.

Il $MRTS_{LK}$ misura quante unità di capitale si possono ridurre quando il lavoro aumenta di una unità, *mantenendo l’output costante*. È la pendenza (in valore assoluto) dell’isoquante.

Intuizione economica

$MRTS = 2$ significa: aumentando L di una unità, possiamo ridurre K di circa due unità senza cambiare la produzione. L’impresa è disposta a sostituire 2 unità di capitale con 1 unità di lavoro.

Proposizione 6.1 (MRTS decrescente). *Lungo un isoquante convesso, il $MRTS_{LK}$ è decrescente al crescere di L . Man mano che si usa più lavoro (e meno capitale), ogni unità aggiuntiva di L produce sempre meno output (MPL cala) e ogni unità in meno di K diventa sempre più preziosa (MPK sale):*

$$MRTS_{LK} = \frac{MPL}{MPK} \downarrow \quad \text{al crescere di } L.$$

6.3 Tipi di tecnologia

6.3.1 Cobb–Douglas (caso generale)

Per $Q = AL^\alpha K^\beta$:

$$MRTS_{LK} = \frac{\alpha K}{\beta L}.$$

Gli isoquanti sono convessi verso l’origine (come in figura sopra). I due fattori sono sostituibili, ma non perfettamente: più si usa lavoro, più il capitale diventa relativamente scarso e prezioso.

6.3.2 Sostituti perfetti

$$Q = aL + bK \quad (a, b > 0).$$

Gli isoquanti sono rette con pendenza $-a/b$. Il $MRTS = a/b$ è costante: la tecnologia sostituisce L con K sempre nella stessa proporzione, indipendentemente dal mix corrente.

Esempio

Due macchine identiche

Se due modelli di tornio producono la stessa quantità per ora di utilizzo, sono perfetti sostituti tecnici: l’impresa può passare dall’uno all’altro senza variazioni di output.

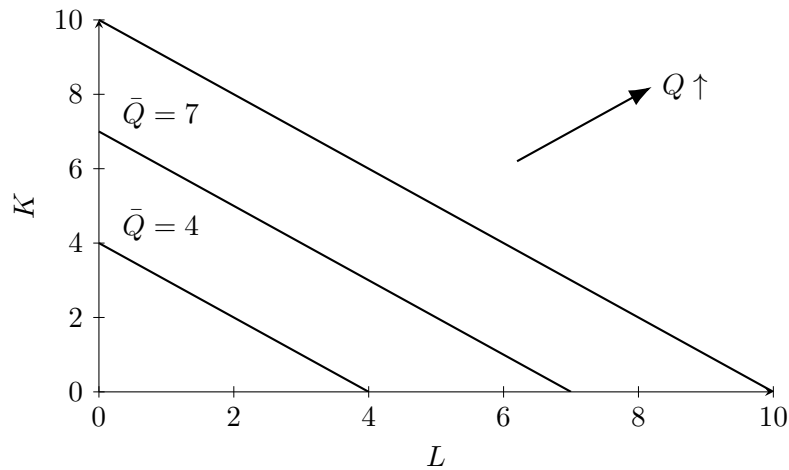


Figura 6.2: Sostituti perfetti: isoquanti lineari, $MRTS$ costante.

6.3.3 Complementi perfetti (proporzioni fisse)

$$Q = \min\{aL, bK\} \quad (a, b > 0).$$

Gli input devono essere usati in proporzione fissa $L/K = b/a$. Gli isoquanti hanno forma a L: usare più di un fattore senza aumentare l'altro non incrementa l'output.

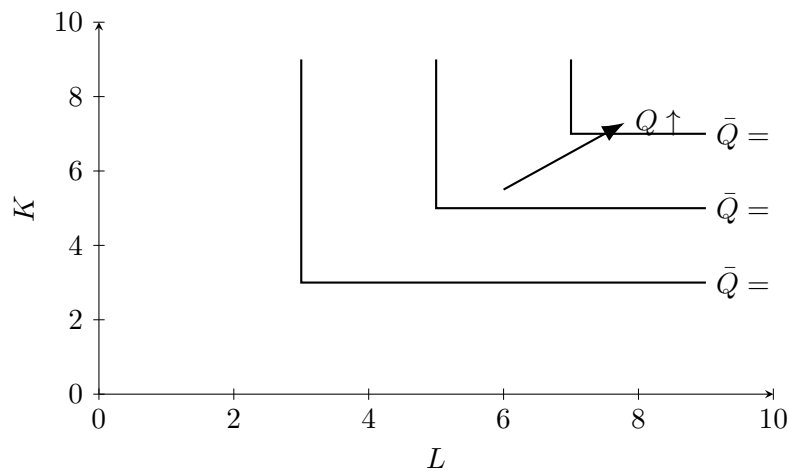


Figura 6.3: Complementi perfetti: isoquanti a L, proporzioni fisse.

Esempio

Autista e camion

Servono esattamente 1 autista e 1 camion per ogni turno di consegna. Aggiungere un secondo autista senza un secondo camion (o viceversa) non aumenta il numero di consegne.

6.4 Esercizi

Esercizio 6.1.

Per $Q = L^{0.6}K^{0.4}$, calcola il $MRTS_{LK}$ nel punto $(L, K) = (16, 9)$ e interpretalo.

Esercizio 6.2.

Spiega in 4-5 righe perché due isoquanti non possono intersecarsi.

Esercizio 6.3.

Per ciascuna delle seguenti funzioni di produzione, disegna schematicamente gli isoquanti e indica se i fattori sono complementi perfetti, sostituti perfetti o caso intermedio:

a) $Q = 3L + 5K$;

b) $Q = \min\{2L, K\}$;

c) $Q = L^{0.5}K^{0.5}$.

Esercizio 6.4.

Un'impresa con $Q = L^{0.5}K^{0.5}$ si trova nel punto $(L, K) = (4, 9)$. Calcola $MRTS_{LK}$ e interpreta economicamente il risultato.

Da sapere per l'esame

1. definire isoquante e descriverne le quattro proprietà;
2. calcolare e interpretare il $MRTS_{LK} = MPL/MPK$;
3. spiegare perché il $MRTS$ è decrescente lungo un isoquante convesso;
4. riconoscere e disegnare gli isoquanti per Cobb–Douglas, sostituti e complementi perfetti;
5. collegare il tipo di isoquante alla sostituibilità tra fattori.

Capitolo 7

Costi di Produzione e Curve di Costo

7.1 Dalla tecnologia ai costi

Abbiamo studiato la tecnologia: $Q = f(L, K)$, isoquanti, $MRTS$, rendimenti di scala. Il passo successivo è capire come questa tecnologia si traduce in costi monetari.

Idea chiave

Come il vincolo di bilancio delimita le scelte del consumatore, la struttura dei costi delimita e orienta le decisioni dell'impresa: prezzi, scala ottimale, redditività.

Tecnologia + prezzi dei fattori \Rightarrow funzione di costo.

7.2 Costi fissi, variabili e totali

Definizione 7.1 (Costi fissi, variabili e totali). • **Costi fissi** (FC): non dipendono dalla quantità prodotta Q . Esistono anche a $Q = 0$. Esempi: affitti, ammortamenti macchinari, stipendi del management.

- **Costi variabili** ($VC(Q)$): aumentano con Q . Esempi: materie prime, energia, lavoro diretto.
- **Costi totali**: $TC(Q) = FC + VC(Q)$.

Esempio

Barilla (Parma)

FC : stabilimento di Pedrignano (capacità 1.000 t/giorno), ammortamenti impianti, contratti energetici fissi. VC : grano duro, acqua, energia variabile, manodopera a chiamata.

7.3 Costi medi e costo marginale

Definizione 7.2 (Costi medi).

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}, \quad AFC(Q) = \frac{FC}{Q}, \quad AVC(Q) = \frac{VC(Q)}{Q}.$$

Vale sempre: $AC = AFC + AVC$.

Definizione 7.3 (Costo marginale).

$$MC(Q) = \frac{dTC(Q)}{dQ} = \frac{dVC(Q)}{dQ}.$$

Il costo marginale misura il costo addizionale per produrre una unità in più.

Osservazione 7.1.

Poiché FC è costante, $\frac{dFC}{dQ} = 0$: il costo marginale dipende solo dai costi variabili.

Intuizione economica

Collegamento con la produttività marginale. Se aggiungo un lavoratore (costo w), produco MPL unità in più, quindi:

$$MC \approx \frac{w}{MPL}.$$

Quando MPL scende (rendimenti marginali decrescenti), MC sale.

Esempio

Ferrari

Ogni vettura richiede centinaia di ore di lavorazione artigianale. Aggiungere una vettura al programma produttivo significa straordinari e colli di bottiglia nei reparti specializzati: MC cresce rapidamente. Ferrari sceglie deliberatamente di non espandere oltre la soglia in cui MC inizia a salire bruscamente, mantenendo così i costi medi sotto controllo e la scarsità del prodotto.

7.4 Forma delle curve di costo e relazione tra MC e AC

L' AFC è sempre decrescente (iperbole: i costi fissi si “spalmano” su più unità). L' AVC e l' AC hanno tipicamente forma a U, collegata ai rendimenti marginali: prima crescenti (economie di specializzazione), poi decrescenti (congestione).

Proposizione 7.1 (MC interseca AC e AVC nei minimi). *Valgono le seguenti relazioni:*

- se $MC < AC$, allora AC è decrescente;
- se $MC > AC$, allora AC è crescente;
- se $MC = AC$, allora AC è al suo minimo.

La stessa logica vale con AVC al posto di AC .

Idea della dimostrazione

$\frac{d(AC)}{dQ} = \frac{d}{dQ} \left(\frac{TC}{Q} \right) = \frac{MC \cdot Q - TC}{Q^2} = \frac{MC - AC}{Q}$. Questo è negativo (AC decresce) se e solo se $MC < AC$, e positivo (AC cresce) se $MC > AC$. Nel minimo di AC la derivata è zero, quindi $MC = AC$.

Intuizione economica

È la stessa logica della media dei voti: se il prossimo voto è sotto la media, la media scende; se è sopra, sale. La media è al minimo quando coincide col voto marginale.

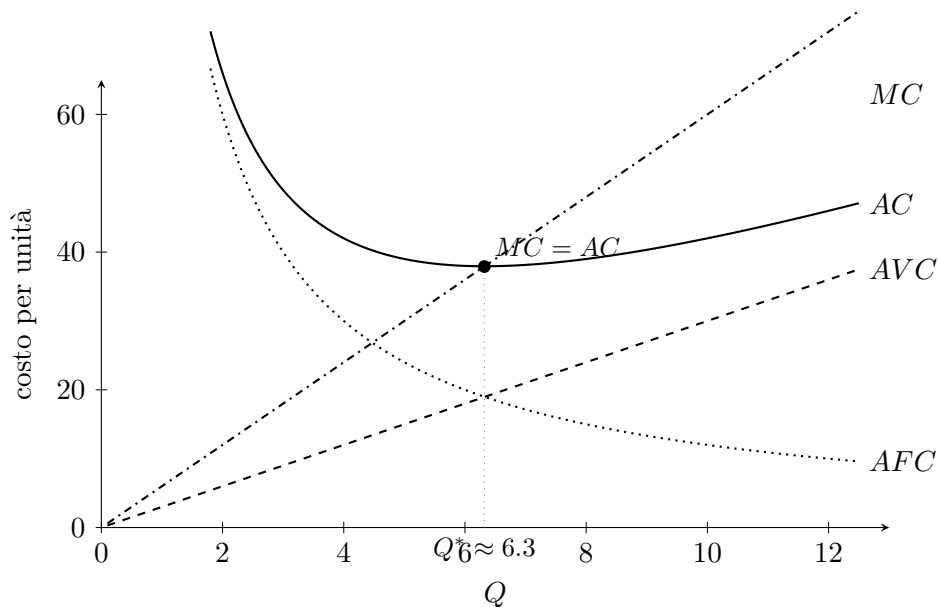


Figura 7.1: Curve di costo per $TC(Q) = 120 + 3Q^2$. AFC è un'iperbole decrescente; AVC è lineare crescente; AC ha forma a U con minimo in $Q^* \approx 6.3$ dove $MC = AC$.

Esempio

Startup digitale e AFC

Una startup con costi fissi (server, licenze, uffici) di €100.000/mese: se serve 1.000 utenti, $AFC = €100$ /utente; se ne serve 100.000, $AFC = €1$ /utente. Ecco perché le piattaforme digitali puntano alla scala.

7.5 Costi nel lungo periodo ed economie di scala

Nel lungo periodo tutti i fattori sono variabili. L'impresa sceglie la combinazione (L, K) che minimizza il costo per produrre Q :

$$C(Q) = \min_{L, K} \{wL + rK : f(L, K) \geq Q\}.$$

La curva di costo medio di lungo periodo $LAC(Q) = C(Q)/Q$ è tipicamente a U:

- a basse quantità: **economie di scala** (LAC decrescente) — divisione del lavoro, specializzazione, costi fissi ripartiti su più unità;
- a quantità elevate: **diseconomie di scala** (LAC crescente) — problemi di coordinamento, burocrazia.

Il punto di minimo di LAC è detto **scala minima efficiente (SME)**.

Proposizione 7.2 (Relazione tra rendimenti di scala e LAC). • *Rendimenti crescenti* \Rightarrow LAC decrescente (*economie di scala*);

- *Rendimenti costanti* \Rightarrow LAC costante;
- *Rendimenti decrescenti* \Rightarrow LAC crescente (*diseconomie di scala*).

Osservazione 7.2 (LAC come inviluppo).

La curva LAC è l'*inviluppo inferiore* di tutte le curve AC di breve periodo (ognuna corrispondente a un livello fisso di K). Per ogni Q l'impresa di lungo periodo può scegliere il livello di K ottimale, quindi $LAC(Q) \leq AC_{BP}(Q)$ per ogni curva di breve.

Esempio analitico

Da TC a tutte le curve

Sia $TC(Q) = 120 + 3Q^2$.

- $FC = 120, VC(Q) = 3Q^2$.
- $AFC = 120/Q; AVC = 3Q; AC = 120/Q + 3Q; MC = 6Q$.
- Minimo di AC : $\frac{dAC}{dQ} = -120/Q^2 + 3 = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{40} \approx 6.32$.
- Verifica: $MC(Q^*) = 6\sqrt{40} = AC(Q^*)$. ✓

Osservazione: AVC è lineare crescente, MC ha pendenza doppia rispetto ad AVC .

Esempio analitico

Shock sui costi variabili

Partiamo da $TC(Q) = 120 + 3Q^2$. Uno shock energetico aumenta i variabili del 20%:
 $TC'(Q) = 120 + 3.6Q^2$.

- $MC'(Q) = 7.2Q; AVC'(Q) = 3.6Q$.
- FC rimane invariato a 120.
- Nuovo minimo di AC' : $Q^{**} = \sqrt{120/3.6} \approx 5.77 < Q^* \approx 6.32$.

Con costi variabili più alti, il punto di minimo si sposta a sinistra: conviene produrre meno per minimizzare il costo medio unitario.

Esempio

Crisi energetica 2022 in Emilia-Romagna

Nel 2022 il prezzo del gas è aumentato di oltre il 300%. Le imprese manifatturiere emiliane (ceramica di Sassuolo, metalmeccanica, alimentare) hanno subito uno shock su VC . AVC e MC si sono spostati verso l'alto; AFC è rimasto invariato. Le più colpite: imprese *energy-intensive* con domanda elastica (non potevano traslare il costo sul consumatore).

7.6 Esercizi

Esercizio 7.1.

Dato $TC(Q) = 200 + 5Q + Q^2$:

- Identifica FC e $VC(Q)$.
- Calcola AFC , AVC , AC e MC .
- Qual è la forma di AVC ? (Lineare, a U, iperbole?)
- Trova Q^* che minimizza AC e verifica $MC(Q^*) = AC(Q^*)$.

Esercizio 7.2.

Considera $TC(Q) = F + cQ^2$ con $F > 0, c > 0$.

- Trova in forma simbolica $Q^* = \sqrt{F/c}$.
- Come cambia Q^* se aumenta F ? E se aumenta c ? Dai un'interpretazione economica.

Esercizio 7.3 (Vero o Falso).

Motiva in due righe ciascuna risposta.

- a) Se $MC < AC$, allora AC sta diminuendo.
- b) MC interseca AC nel punto di massimo di AC .
- c) MC non dipende da FC .
- d) Se $MC < AVC$, allora AVC sta diminuendo.

Esercizio 7.4.

Per ciascuna delle seguenti industrie, ti aspetti un LAC decrescente, costante o crescente? Motiva brevemente.

- a) Produzione di microchip (investimenti enormi in fab; costo marginale quasi nullo).
- b) Consulenza professionale individuale (avvocati, commercialisti).
- c) Grande distribuzione organizzata (GDO).

Da sapere per l'esame

1. distinguere FC , VC , TC e ricavarli da una funzione di costo;
2. calcolare AFC , AVC , AC e MC da $TC(Q)$;
3. spiegare perché MC interseca AC (e AVC) nei rispettivi minimi (con la derivata);
4. trovare il Q^* che minimizza AC e verificare la condizione $MC(Q^*) = AC(Q^*)$;
5. analizzare gli effetti di uno shock su FC o su VC sulle curve di costo;
6. collegare LAC ai rendimenti di scala: descrivere economie e diseconomie di scala e la SME.

Capitolo 8

Minimizzazione dei Costi e Scelta Ottimale dei Fattori

8.1 Simmetria con il consumatore

Idea chiave

Il consumatore **massimizza l'utilità** dato il vincolo di bilancio.
L'impresa **minimizza il costo** dato il vincolo produttivo (l'isoquante).
Stessa struttura matematica, direzione invertita.

La lezione 8 ci ha fornito le curve di costo "già risolte". Ora vediamo *come* nascono: dato un target di output \bar{Q} , quale mix (L, K) costa meno?

8.2 Il problema di minimizzazione dei costi

Definizione 8.1 (Problema di minimizzazione dei costi (LP)).

$$\min_{L, K \geq 0} C = wL + rK \quad \text{s.t.} \quad f(L, K) \geq \bar{Q}.$$

dove $w > 0$ è il salario (costo per unità di lavoro) e $r > 0$ è il costo del capitale (canone di leasing, tasso di rendimento richiesto).

Geometricamente: trovare il punto sull'isoquante $f(L, K) = \bar{Q}$ che si trova sull'*isocosto più basso possibile*.

Esempio

Impresa di logistica (Emilia-Romagna)

Deve consegnare 10.000 pacchi al giorno ($\bar{Q} = 10.000$). Può farlo con molti corrieri e pochi furgoni, oppure con molti furgoni automatizzati e pochi corrieri. Il mix ottimale dipende da w (costo del lavoro) e r (costo di leasing dei furgoni).

8.3 Rette di isocosto

Definizione 8.2 (Retta di isocosto).

L'isocosto è l'insieme di combinazioni (L, K) che comportano la stessa spesa C :

$$wL + rK = C \quad \Rightarrow \quad K = \frac{C}{r} - \frac{w}{r}L.$$

- **Intercetta su K :** C/r — quante unità di capitale si acquistano spendendo tutto in K .
- **Intercetta su L :** C/w — quante unità di lavoro si acquistano spendendo tutto in L .
- **Pendenza:** $-w/r$ — il prezzo relativo del lavoro rispetto al capitale.

Spostamenti dell'isocosto (analogia con il vincolo di bilancio):

- spesa maggiore \Rightarrow isocosto parallelo più lontano dall'origine;
- $w \uparrow \Rightarrow$ isocosto più ripido (lavoro relativamente più caro);
- $r \uparrow \Rightarrow$ isocosto meno ripido.

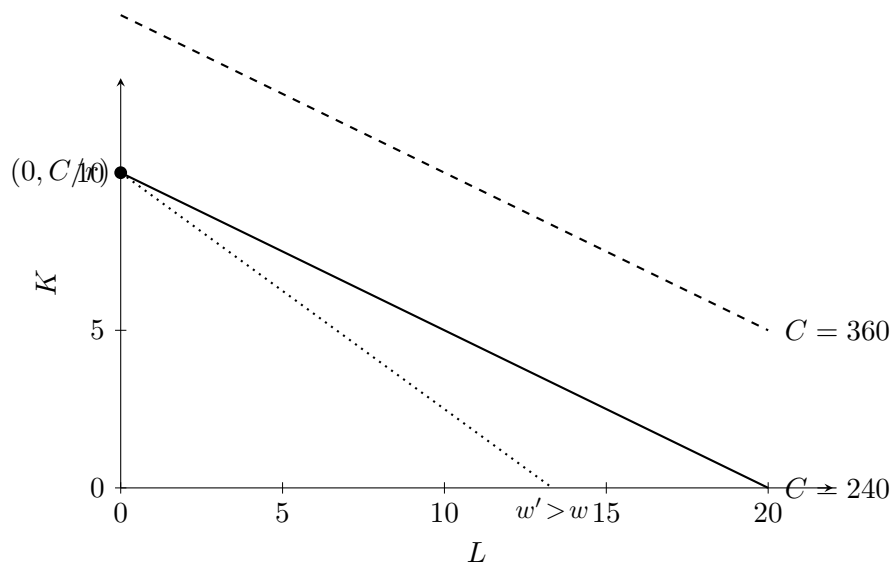


Figura 8.1: Rette di isocosto per $w = 12$, $r = 24$, $C = 240$ (continua) e $C = 360$ (tratteggiata). La linea puntinata mostra l'effetto di un aumento del salario a $w' = 18$: la retta ruota verso il basso sull'asse L (intercetta su L cade da 20 a ≈ 13.3), diventando più ripida.

8.4 Condizione di tangenza: $MRTS = w/r$

All'ottimo interno, l'isoquante e l'isocosto sono tangenti: le loro pendenze coincidono.

Definizione 8.3 (Condizione di ottimo (lungo periodo)).

$$MRTS_{LK} = \frac{MPL}{MPK} = \frac{w}{r}.$$

Forma equivalente (produttività marginale per euro speso):

$$\frac{MPL}{w} = \frac{MPK}{r}.$$

Intuizione economica

Se $\frac{MPL}{w} > \frac{MPK}{r}$: un euro speso in lavoro produce più output di un euro speso in capitale. Convieni spostare spesa verso L (e ridurre K) finché i rendimenti per euro si eguagliano.

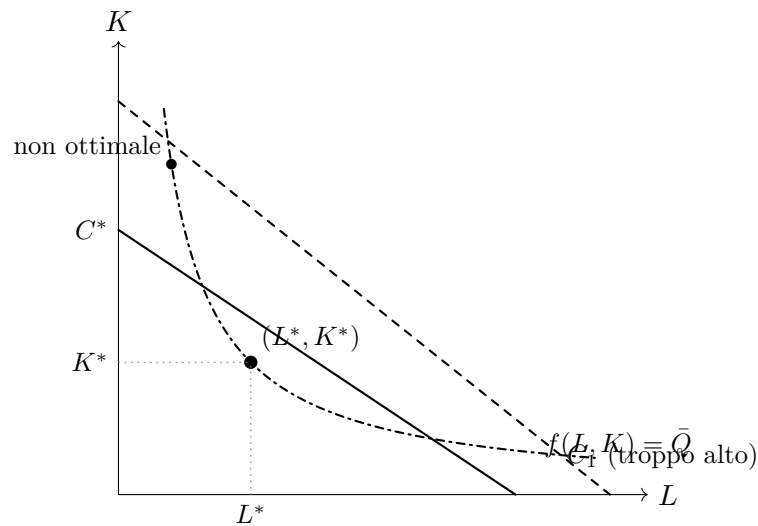


Figura 8.2: Minimizzazione dei costi. L'isocosto C^* è il più basso che raggiunge l'isoquanto \bar{Q} . L'isocosto $C_1 > C^*$ interseca l'isoquanto (fattibile ma non ottimale: si spende troppo). Il punto di tangenza (L^*, K^*) soddisfa $MRTS = w/r$.

Idea chiave

La condizione di ottimo del produttore è strutturalmente identica a quella del consumatore:

$$\underbrace{\frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y}}_{\text{consumatore}} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{\frac{MPL}{w} = \frac{MPK}{r}}_{\text{produttore}}$$

8.5 Soluzione con tecnologia Cobb–Douglas

Per $Q = AL^\alpha K^\beta$, la condizione di tangenza diventa:

$$\frac{\alpha K}{\beta L} = \frac{w}{r} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{w}{r} \cdot L.$$

Proposizione 8.1 (Procedura di minimizzazione Cobb–Douglas). 1. Ricava il rapporto $K/L = (\beta/\alpha)(w/r)$ dalla condizione di tangenza.

2. Sostituisci $K = (\beta/\alpha)(w/r)L$ nel vincolo $f(L, K) = \bar{Q}$ per trovare L^* .

3. Ricava K^* dal rapporto.

4. Calcola $C^* = wL^* + rK^*$.

Esempio 8.1 (Minimizzazione completa).

Tecnologia $Q = L^{0.6}K^{0.4}$; $w = 10$, $r = 20$; target $\bar{Q} = 50$.

Passo 1 — Rapporto ottimo:

$$\frac{K}{L} = \frac{0.4}{0.6} \cdot \frac{10}{20} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{L}{3}.$$

Passo 2 — Vincolo output ($\alpha + \beta = 1$, semplificazione):

$$50 = L^{0.6} \left(\frac{L}{3}\right)^{0.4} = L \cdot 3^{-0.4} \quad \Rightarrow \quad L^* = 50 \cdot 3^{0.4} \approx 77.6.$$

Passo 3 — $K^* = L^*/3 \approx 25.9$.

Passo 4 — Costo minimo: $C^* = 10 \cdot 77.6 + 20 \cdot 25.9 \approx 1294$.

Osservazione 8.1.

Con $r = 20 > w = 10$, il capitale è relativamente caro. Il mix ottimo è $K/L = 1/3$: l'impresa è labour-intensive.

8.6 Statica comparata: effetti di variazioni di w e r

Dalla condizione ottimale $K/L = (\beta/\alpha)(w/r)$:

Shock	Effetto su K/L	Interpretazione
$w \uparrow$	$K/L \uparrow$	Sostituisce L con K (automazione)
$w \downarrow$	$K/L \downarrow$	Usa più lavoro, meno capitale
$r \uparrow$	$K/L \downarrow$	Capitale più caro, preferisce L
$r \downarrow$	$K/L \uparrow$	Sussidio a investimenti \Rightarrow più K

Osservazione 8.2.

Il costo minimo C^* *aumenta sempre* quando w o r salgono: si paga di più per produrre lo stesso output. Ma l'aumento è *attenuato* dalla possibilità di sostituire il fattore diventato più caro.

Esempio

Amazon e l'automazione dei magazzini

Negli ultimi 10 anni i salari nel settore logistico sono aumentati ($w \uparrow$): il rapporto ottimo K/L sale, conviene sostituire lavoro con robot. Parallelamente il costo dei robot è sceso ($r \downarrow$): effetto moltiplicativo. Nei magazzini Amazon con robot (sistema Kiva), la produttività per m^2 è aumentata e il costo per unità spedita è calato.

8.7 Esercizi

Esercizio 8.1.

Con $w = 12$, $r = 24$, $C = 240$:

- Scrivi l'isocosto in forma $K = \dots$
- Intercette e pendenza.
- Se w aumenta a 18 (a parità di r e C), come cambia l'isocosto?

Esercizio 8.2.

Un'impresa si trova in un punto sull'isoquanto con $MPL = 8$, $MPK = 4$, $w = 16$, $r = 24$.

- Calcola $MRTS$ e w/r . Siamo all'ottimo?
- Se non siamo all'ottimo, in che direzione conviene muoversi?
- Cosa accade a MPL e MPK mentre l'impresa si sposta verso l'ottimo?

Esercizio 8.3.

Tecnologia $Q = 2L^{0.5}K^{0.5}$; $w = 8$, $r = 2$; target $\bar{Q} = 40$.

- a) Trova K/L ottimale.
- b) Ricava L^* e K^* .
- c) Calcola C^* .
- d) Il mix è labour-intensive o capital-intensive? Perché?

Esercizio 8.4.

Partendo dall'Esercizio 3 (con $w = 8$, $r = 2$), supponi che w scenda a 2.

- a) Calcola il nuovo K/L e le nuove quantità L^{**} , K^{**} .
- b) Calcola C^{**} . Confronta con C^* : cosa noti?
- c) Dai un'interpretazione economica del risultato.

Esercizio 8.5.

Il governo introduce un salario minimo che porta w da 10 a 14; $r = 20$; $Q = L^{0.7}K^{0.3}$.

- a) Come cambia il rapporto K/L ottimale?
- b) Quali imprese riescono ad adattarsi facilmente e quali no?
- c) Il costo minimo per produrre lo stesso \bar{Q} aumenta o diminuisce?

Da sapere per l'esame

1. impostare il problema di minimizzazione: $\min wL + rK$ s.t. $f(L, K) \geq \bar{Q}$;
2. costruire e interpretare le rette di isocosto (intercette, pendenza $-w/r$, spostamenti);
3. derivare e interpretare la condizione di tangenza $MRTS = w/r$ (e la forma equivalente $MPL/w = MPK/r$);
4. risolvere la minimizzazione con tecnologia Cobb–Douglas (ricetta in 4 passi);
5. fare statica comparata: effetti di variazioni di w o r sul rapporto K/L e sul costo minimo;
6. collegare la scelta ottimale dei fattori a decisioni aziendali reali (automazione, delocalizzazione).

Domande ed esercizi

Domande a risposta multipla

1. Quale affermazione sulla funzione di produzione $Q = f(L, K)$ è corretta?

- A La funzione di produzione descrive la spesa minima necessaria per produrre Q .
- B La funzione di produzione indica la quantità massima di output ottenibile da ogni combinazione di input.
- C Nel breve periodo tutti i fattori produttivi sono variabili.
- D La funzione di produzione è definita solo per $L = K$.

2. Per la funzione Cobb–Douglas $Q = AL^\alpha K^\beta$, i rendimenti di scala sono crescenti se e solo se:

- A $\alpha > \beta$;
- B $\alpha + \beta = 1$;
- C $\alpha + \beta > 1$;
- D $\alpha \cdot \beta > 1$.

3. Il prodotto medio del lavoro (APL) è al suo **massimo** quando:

- A $MPL = 0$;
- B $MPL > APL$;
- C $MPL = APL$;
- D $APL = 0$.

4. La curva AC raggiunge il suo **minimo** nel punto in cui:

- A $AFC = AVC$;
- B $MC = AFC$;
- C $MC = AC$;
- D $\frac{dMC}{dQ} = 0$.

5. Un'impresa affronta uno **shock sui costi fissi** (per esempio, l'affitto raddoppia). Quale curva rimane invariata?

- A AC .
- B AFC .
- C MC .
- D AVC e MC .

Esercizi e domande aperte

1. Considera la funzione di produzione $Q = L^{0.5}K^{0.5}$.

- a) Calcola MPL e MPK e verifica che entrambi sono decrescenti nei rispettivi input (con l'altro tenuto fisso).
- b) Classifica i rendimenti di scala usando la definizione formale $f(tL, tK)$ vs $tf(L, K)$.
- c) Calcola il $MRTS_{LK}$ nel punto $(L, K) = (4, 9)$ e interpreta economicamente il risultato: quante unità di K può sostituire l'impresa con una unità in più di L senza variare l'output?
- d) Spiega con parole tue perché il $MRTS_{LK}$ è decrescente lungo un isoquanto convesso.

2. Dato $TC(Q) = 200 + 4Q + Q^2$:

- a) Identifica FC e $VC(Q)$ e scrivi le espressioni di $AFC(Q)$, $AVC(Q)$, $AC(Q)$, $MC(Q)$.
- b) Trova il livello Q^* che minimizza AC e verifica analiticamente che $MC(Q^*) = AC(Q^*)$.
- c) Uno shock aumenta i costi variabili del 50%: nuovo $VC'(Q) = 1.5(4Q + Q^2)$. Come cambiano MC' , AVC' e il nuovo Q^{**} che minimizza AC' ? Q^{**} è maggiore o minore di Q^* ?
- d) Spiega in tre righe perché MC non dipende da FC e quale implicazione ha questo per le decisioni di breve periodo dell'impresa.

3. Spiega in modo chiaro (massimo 12 righe) le analogie e le differenze tra:

- a) curva di indifferenza e isoquanto;
- b) vincolo di bilancio e retta di isocosto;
- c) condizione di ottimo del consumatore ($MRS = p_x/p_y$) e condizione di ottimo del produttore ($MRTS = w/r$).

Poi rispondi: nel problema del consumatore il parametro libero è il *reddito* M ; nel problema del produttore di lungo periodo è il *target di output* \bar{Q} . Come si riflette questa differenza nella struttura geometrica dei due problemi?

Capitolo 9

Massimizzazione del Profitto

9.1 Profitto contabile e profitto economico

La parola *profitto* in economia ha un significato preciso e più restrittivo rispetto all'uso contabile corrente. La distinzione è fondamentale per le decisioni dell'impresa.

Definizione 9.1 (Profitto economico).

Il **profitto economico** è definito come:

$$\pi = TR - TC = P \cdot Q - C(Q)$$

dove TC comprende *tutti* i costi di opportunità: sia espliciti (pagamenti monetari effettivi) sia impliciti (valore del miglior impiego alternativo delle risorse impegnate nell'impresa).

Definizione 9.2 (Costi espliciti e impliciti).

- **Costi espliciti:** pagamenti monetari osservabili — affitti, salari a dipendenti, materie prime, interessi su debiti, ammortamenti.
- **Costi impliciti (di opportunità):** il valore del miglior impiego alternativo delle risorse proprie — lo stipendio che l'imprenditore otterrebbe come dipendente altrove, il rendimento che il capitale proprio genererebbe nel prossimo miglior impiego, il costo del tempo impiegato.

Il **profitto contabile** include solo i costi espliciti: $\pi_{\text{cont}} = TR - \text{costi espliciti} \geq \pi_{\text{econ}}$.

Idea chiave

Il profitto economico misura il guadagno *in eccesso* rispetto alla migliore alternativa disponibile. Un profitto economico nullo non significa che l'imprenditore non guadagni nulla: significa che sta ottenendo esattamente il **rendimento normale**, ovvero quanto realizzerebbe nella sua migliore alternativa.

Esempio 9.1 (Profitto contabile vs. economico).

Una pizzeria realizza ricavi annuali di €140.000 con costi espliciti di €95.000. Il titolare potrebbe percepire €38.000 come dipendente altrove; il capitale proprio investito (€50.000) avrebbe un rendimento alternativo del 4% (cioè €2.000).

	Profitto contabile	Profitto economico
Ricavi	€140.000	€140.000
Costi espliciti	-€95.000	-€95.000
Stipendio alternativo	—	-€38.000
Rendimento alternativo del capitale	—	-€2.000
Profitto	€45.000	€5.000

Il titolare guadagna €5.000 più di quanto otterrebbe nella sua alternativa migliore. Se i ricavi scendessero a €130.000, il profitto economico diventerebbe -€5.000 nonostante un profitto contabile ancora positivo (€35.000): converrebbe chiudere e lavorare come dipendente.

Osservazione 9.1 (Implicazioni per la dinamica del mercato).

Le tre situazioni hanno implicazioni precise per l'entrata e l'uscita:

- $\pi > 0$: le risorse nell'impresa rendono più della loro alternativa \Rightarrow nuove imprese sono incentivate a entrare nel mercato.
- $\pi = 0$: rendimento normale; nessun incentivo netto a entrare o uscire.
- $\pi < 0$: le risorse rendono meno della loro alternativa \Rightarrow alcune imprese usciranno dal mercato.

Questa logica è alla base dell'equilibrio di lungo periodo in concorrenza perfetta (cap. 6).

9.2 L'impresa price-taker

Definizione 9.3 (Concorrenza perfetta).

Un mercato è in **concorrenza perfetta** se soddisfa quattro condizioni:

1. **Molti compratori e venditori**: nessun agente è abbastanza grande da influenzare il prezzo di mercato.
2. **Bene omogeneo**: i prodotti di imprese diverse sono perfettamente sostituibili.
3. **Informazione perfetta**: tutti gli agenti conoscono prezzi e qualità.
4. **Libera entrata e uscita**: nel lungo periodo non esistono barriere all'ingresso nel mercato.

Definizione 9.4 (Impresa price-taker).

Un'impresa è **price-taker** se prende il prezzo P^* come dato, indipendentemente dalla quantità prodotta. La curva di domanda che l'impresa fronteggia è orizzontale: $P(Q) = P^*$ per ogni $Q \geq 0$.

Definizione 9.5 (Ricavo totale e ricavo marginale dell'impresa price-taker).

Per un'impresa price-taker al prezzo P :

$$TR(Q) = P \cdot Q \quad (\text{retta per l'origine con pendenza } P)$$

$$MR(Q) = \frac{dTR}{dQ} = P \quad (\text{costante, uguale al prezzo di mercato})$$

Osservazione 9.2 (Confronto con il monopolio).

Il risultato $MR = P$ è specifico della concorrenza perfetta. Nel monopolio, l'impresa deve ridurre il prezzo per vendere un'unità in più, quindi $MR(Q) < P(Q)$ per ogni $Q > 0$. Per l'impresa price-taker, ogni unità aggiuntiva è venduta allo stesso prezzo P , e il ricavo marginale coincide con esso.

9.3 Il problema di massimizzazione del profitto

9.3.1 Impostazione formale

L'impresa price-taker sceglie la quantità $Q \geq 0$ per massimizzare il profitto:

$$\max_{Q \geq 0} \pi(Q) = P \cdot Q - C(Q)$$

dove $P > 0$ è il prezzo dato dal mercato e $C(Q)$ è la funzione di costo totale del capitolo precedente, con $C(0) = FC \geq 0$.

9.3.2 Condizioni del primo e del secondo ordine

Proposizione 9.1 (Condizione del primo ordine — CPO). *Se $Q^* > 0$ è un massimo interno del profitto, allora soddisfa la **condizione del primo ordine**:*

$$\left. \frac{d\pi}{dQ} \right|_{Q=Q^*} = P - MC(Q^*) = 0 \quad \implies \quad \boxed{P = MC(Q^*)}$$

Proposizione 9.2 (Condizione del secondo ordine — CSO). *Affinché Q^* sia un massimo (e non un minimo) del profitto, deve valere la **condizione del secondo ordine**:*

$$\left. \frac{d^2\pi}{dQ^2} \right|_{Q=Q^*} = - \left. \frac{dMC}{dQ} \right|_{Q=Q^*} < 0 \quad \iff \quad MC'(Q^*) > 0$$

Il costo marginale deve essere **strettamente crescente** nel punto ottimale.

Idea della dimostrazione

Con $\pi(Q) = PQ - C(Q)$ e P costante:

$$\pi'(Q) = P - C'(Q) = P - MC(Q), \quad \pi''(Q) = -C''(Q) = -MC'(Q).$$

La CPO $\pi'(Q^*) = 0$ dà $P = MC(Q^*)$. La CSO $\pi''(Q^*) < 0$ richiede $MC'(Q^*) > 0$: la curva MC deve essere crescente in Q^* . Se fosse decrescente, saremmo in un *minimo* del profitto.

Globalità del massimo e radici multiple della CPO

La CPO è *necessaria* per un ottimo interno, ma non sempre *sufficiente* globalmente. Per i costi cubici tipici ($C(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d$), la curva MC è una parabola e l'equazione $P = MC(Q)$ può avere **due radici**. Solo quella con $MC'(Q^*) > 0$ è un massimo locale; l'altra è un minimo locale. Il massimo *globale* richiede un passo aggiuntivo: confrontare $\pi(Q_{loc}^*)$ con $\pi(0) = -FC$ (lo shutdown). Più precisamente, il candidato ottimale tra i massimi locali interni è quello con profitto più elevato, e poi questo va confrontato con il valore di non produzione.

Una condizione *sufficiente* per avere un unico massimo globale interno è la concavità globale di π , cioè $MC'(Q) > 0$ per ogni $Q \geq 0$ (funzioni di costo strettamente convesse). Con MC lineare crescente, come in $C(Q) = Q^2 + bQ + c$, questa condizione è sempre soddisfatta.

Intuizione economica

La condizione $P = MC$ è il **principio di analisi marginale** applicato alla produzione. Il ragionamento unità per unità è:

- $P > MC(Q)$: produrre un'unità in più aggiunge P ai ricavi e $MC(Q)$ ai costi. Poiché $P > MC$, il profitto aumenta \Rightarrow conviene espandere.
- $P < MC(Q)$: l'ultima unità prodotta costa di più di quanto rende \Rightarrow conviene ridurre la produzione.
- $P = MC(Q)$: né espandere né contrarre migliora il profitto; il profitto è stazionario. Se MC è crescente, questo è un massimo.

L'impresa espande finché il ricavo aggiuntivo supera il costo aggiuntivo; si ferma quando si uguagliano.

Esempio analitico

Analisi discreta con $P = 12$

Unità	MC	$P - MC$	Produrre?
1	3	+9	Sì
2	5	+7	Sì
3	8	+4	Sì
4	11	+1	Sì
5	12	0	Indifferente ($Q^* = 5$)
6	14	-2	No
7	17	-5	No

Le prime cinque unità sono prodotte perché ognuna aggiunge profitto netto positivo. La sesta costerebbe 14 ma renderebbe solo 12: non conviene. La CPO discreta è soddisfatta a $Q^* = 5$.

9.4 Il profitto come area

Proposizione 9.3 (Profitto come area di un rettangolo). *Per un'impresa price-taker che produce Q^* con $P = MC(Q^*)$, il profitto si scrive:*

$$\pi(Q^*) = [P - AC(Q^*)] \cdot Q^*$$

Nel piano (Q, P) , il profitto è l'area del rettangolo di base Q^* e altezza $(P - AC(Q^*))$.

Idea della dimostrazione

Per definizione di costo medio $AC(Q) = C(Q)/Q$, dunque $C(Q) = AC(Q) \cdot Q$. Pertanto:

$$\pi(Q^*) = PQ^* - C(Q^*) = PQ^* - AC(Q^*) \cdot Q^* = [P - AC(Q^*)] \cdot Q^*.$$

Osservazione 9.3 (I tre casi).

Dal segno di $P - AC(Q^*)$ si distinguono tre situazioni:

- $P > AC(Q^*)$: il rettangolo ha area positiva \Rightarrow **profitto positivo**.
- $P = AC(Q^*)$: il rettangolo ha altezza nulla \Rightarrow **profitto nullo** (punto di pareggio o *break-even*). Questo accade quando $P = AC_{\min}$.

- $AVC_{\min} \leq P < AC(Q^*)$: il rettangolo ha area negativa \Rightarrow **perdita**; ma, come vedremo, l'impresa può ancora trovare conveniente produrre in breve periodo.

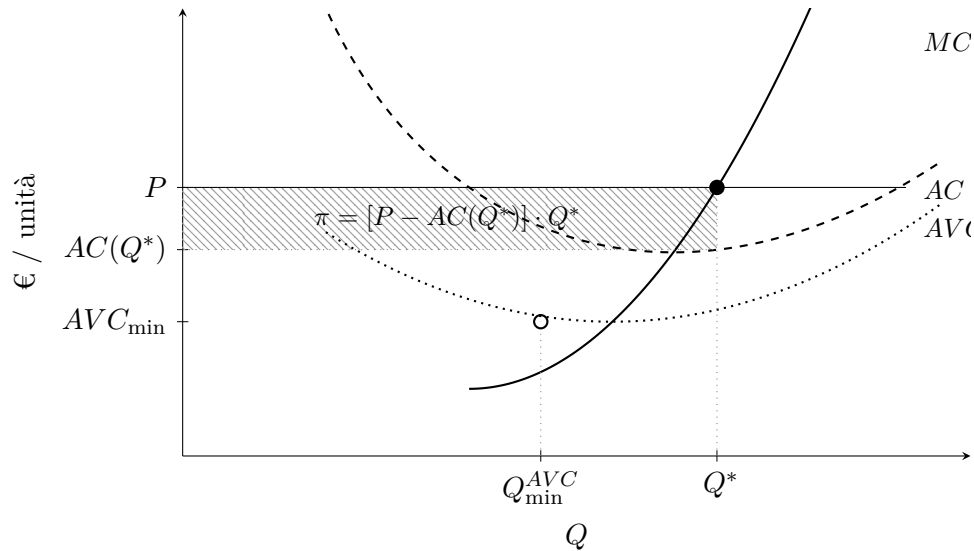


Figura 9.1: Profitto come area del rettangolo tratteggiato. Costo $C(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 10$, $P = 12$, $Q^* = 2 + \sqrt{3} \approx 3.73$, $AC(Q^*) \approx 9.22$. Profitto totale $\pi \approx (12 - 9.22) \cdot 3.73 \approx 10.4$. Il punto $Q_{\min}^{AVC} = 3$ segna il minimo di AVC (punto di shutdown).

9.5 La condizione di shutdown

9.5.1 Impostazione del problema

In breve periodo, l'impresa ha sempre un'alternativa alla produzione: non produrre ($Q = 0$). Se non produce, il profitto è:

$$\pi(0) = P \cdot 0 - C(0) = -FC$$

La perdita a $Q = 0$ è esattamente pari ai costi fissi: l'impresa li sostiene comunque. La domanda è: quando conviene produrre invece di fare shutdown?

9.5.2 Derivazione formale

Proposizione 9.4 (Condizione di shutdown — breve periodo). *L'impresa trova ottimale produrre ($Q^* > 0$) se e solo se:*

$$\boxed{P \geq AVC_{\min}}$$

Il punto di shutdown corrisponde al minimo della curva AVC .

Idea della dimostrazione

L'impresa produce se e solo se $\pi(Q^*) \geq \pi(0) = -FC$, cioè:

$$\begin{aligned}PQ^* - C(Q^*) &\geq -FC \\PQ^* &\geq C(Q^*) - FC = VC(Q^*) \\P &\geq \frac{VC(Q^*)}{Q^*} = AVC(Q^*)\end{aligned}$$

Dunque la produzione è profittevole rispetto allo shutdown se e solo se il prezzo copre il costo variabile medio alla quantità ottima. Poiché per Q^* nel tratto rilevante vale $AVC(Q^*) \geq AVC_{\min}$, l'impresa è disposta a produrre qualcosa se e solo se $P \geq AVC_{\min}$. Sotto questa soglia nessun $Q^* > 0$ soddisfa la condizione.

Idea chiave

I costi fissi non influenzano la decisione di produrre nel breve periodo perché sono **sunk**: sostenuti e non recuperabili indipendentemente dalla scelta. La differenza rilevante è:

$$\pi(Q^*) - \pi(0) = \underbrace{PQ^* - VC(Q^*)}_{\text{contributo di copertura}} \geq 0$$

che non contiene FC . Produrre è preferibile a non produrre se e solo se i ricavi coprono i costi *variabili*; i costi fissi non entrano nel calcolo.

Esempio**Ristorante con affitto già pagato**

Un ristorante ha già sostenuto il costo fisso mensile di €5.000 (affitto). Due scenari:

- *Se apre*: ricavi €8.000, costi variabili €4.000 $\Rightarrow \pi = 8.000 - 4.000 - 5.000 = -1.000$.
- *Se resta chiuso*: $\pi = -5.000$.

Convieni aprire perché $-1.000 > -5.000$. L'affitto è irrecuperabile: non influenza la decisione. Ciò che conta è $PQ^* - VC(Q^*) = 8.000 - 4.000 = 4.000 > 0$: la gestione copre integralmente i costi variabili e lascia €4.000 di contribuzione ai costi fissi, riducendo la perdita da €5.000 a €1.000.

9.5.3 Shutdown in lungo periodo

In lungo periodo tutti i costi sono variabili: non ci sono costi sunk. L'impresa può smobilitare impianti, non rinnovare contratti, uscire liberamente dal mercato.

Proposizione 9.5 (Condizione di shutdown — lungo periodo). *In lungo periodo, l'impresa produce se e solo se:*

$$P \geq AC_{\min}$$

Se $P < AC_{\min}$, l'impresa esce dal mercato. Il punto di pareggio (break-even) $P = AC_{\min}$ è indifferente tra restare e uscire.

Osservazione 9.4.

La logica è speculare a quella del breve periodo ma senza la presenza di costi fissi sunk. In LP il costo “di non produrre” non è $-FC$ ma zero (tutte le risorse possono essere riallocate all'uso alternativo). Quindi la condizione diventa: produrre iff i ricavi coprono *tutti* i costi, fissi e variabili, cioè iff $P \geq AC_{\min}$.

9.6 Le quattro zone e la curva di offerta di breve periodo

Proposizione 9.6 (Le quattro zone). *Dati AVC_{\min} e AC_{\min} (con $AVC_{\min} < AC_{\min}$), il comportamento ottimale dell'impresa è riepilogabile in quattro zone:*

Zona	Condizione su P	Decisione BP	Decisione LP
1	$P < AVC_{\min}$	Shutdown ($Q = 0$)	Esce
2	$AVC_{\min} \leq P < AC_{\min}$	Produce ($\pi < 0$)	Esce
3	$P = AC_{\min}$	Produce ($\pi = 0$)	Indifferente
4	$P > AC_{\min}$	Produce ($\pi > 0$)	Rimane

Osservazione 9.5.

Nella zona 2 l'impresa fa una perdita ma è razionale produrre: la perdita $\pi(Q^*) = -[AC(Q^*) - P] \cdot Q^*$ è inferiore in valore assoluto alla perdita che si avrebbe non producendo ($-FC$). Produrre consente di coprire almeno parzialmente i costi fissi tramite il contributo di copertura $PQ^* - VC(Q^*) > 0$.

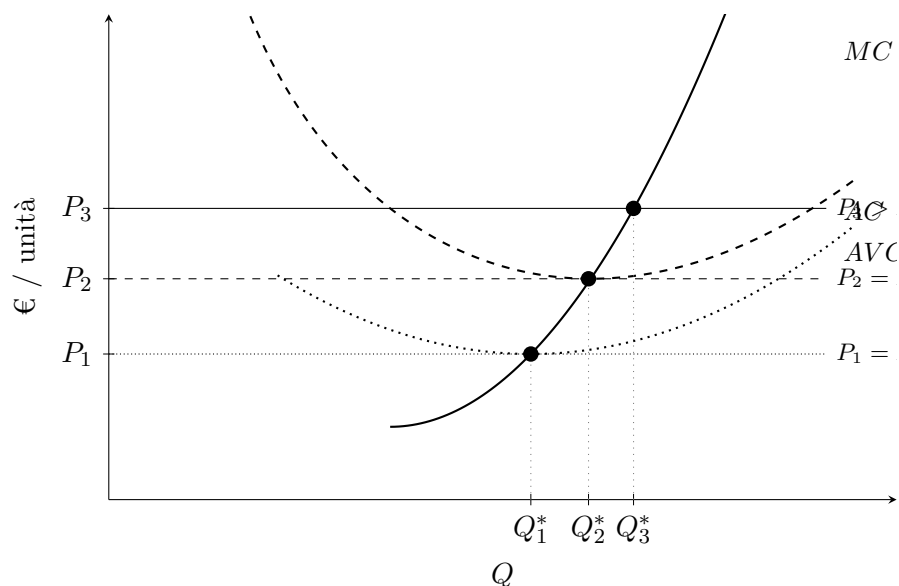


Figura 9.2: Le quattro zone per $C(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 10$. $AVC_{\min} = 6$ (zona 1/2 boundary, shutdown di BP); $AC_{\min} \approx 9.1$ (zona 2/3 boundary, break-even di LP). La curva di offerta di BP è il tratto continuo e spesso di MC al di sopra di P_1 .

Osservazione 9.6

(La curva di offerta di breve periodo — anticipazione).

La Proposizione 9.4 implica che la curva di offerta individuale di BP è il tratto *crescente* della curva MC al di sopra di AVC_{\min} . Formalmente:

$$Q^s(P) = \begin{cases} Q : MC(Q) = P, MC'(Q) > 0 & \text{se } P \geq AVC_{\min} \\ 0 & \text{se } P < AVC_{\min} \end{cases}$$

Questa funzione è oggetto del capitolo seguente.

9.7 Esercizi

Esercizio 9.1.

Un'impresa ha $C(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 10$.

- Calcola MC , AVC e AC . Trova AVC_{\min} minimizzando analiticamente; verifica che $MC = AVC$ nel minimo.
- Per $P = 9$: risolvi la CPO $P = MC$, identifica entrambe le radici, seleziona il massimo tramite CSO. Calcola $\pi(Q^*)$ e $\pi(0)$. L'impresa produce in BP?
- Trova numericamente AC_{\min} imponendo $MC = AC$. L'impresa rimane nel mercato in LP con $P = 9$?
- Ripeti per $P = 12$ e $P = 4$, classificando ogni caso nelle quattro zone della Proposizione 9.6.

Esercizio 9.2.

Un'impresa ha $C(Q) = Q^2 + 4Q + 25$ (con $FC = 25$).

- Calcola MC , AVC , AVC_{\min} , AC e AC_{\min} . (*Attenzione*: la AVC di questo costo è lineare e strettamente crescente; dove si trova il suo minimo?)
- Ricava la curva di offerta di BP $Q^s(P)$ in forma analitica, specificando il dominio.
- Per $P \in \{6, 10, 14, 18\}$: tabella con Q^* , π , decisione BP e decisione LP.
- A quale prezzo esatto l'impresa è al break-even di LP? Verifica che in quel punto $P = MC = AC$.

Esercizio 9.3 (Profitto economico e decisione d'uscita).

Martina gestisce uno studio grafico. Dati annuali: ricavi €120.000; costi espliciti (affitto, software, collaboratori) €74.000; stipendio alternativo come dipendente €36.000; capitale investito €60.000, tasso di rendimento alternativo 3%.

- Calcola π_{cont} e π_{econ} .
- Conviene a Martina continuare l'attività?
- Se i ricavi scendessero a €105.000, quale sarebbe la decisione ottimale?
- Se il costo fisso (affitto) fosse già pagato e non recuperabile per l'anno in corso, e i costi variabili fossero €50.000 contro ricavi €105.000, conviene aprire in BP? Calcola esplicitamente $\pi(\text{aperto})$ e $\pi(\text{chiuso})$.

Esercizio 9.4 (Costi fissi e decisione marginale).

Un'impresa ha $FC = 300$, $AVC_{\min} = 18$, $AC_{\min} = 30$. Il prezzo corrente è $P = 22$ e la quantità ottima (se produce) è $Q^* = 15$ con $AC(Q^*) = 28$.

- In quale zona si trova l'impresa?
- Calcola $\pi(Q^*)$ e $\pi(0)$. È corretto produrre in BP?
- Di quanto cambierebbe Q^* se i costi fissi raddoppiassero (a parità di MC e AVC)? Giustifica formalmente usando la CPO.
- Spiega in tre righe perché un'impresa con perdita contabile potrebbe comunque trovare razionale continuare a produrre nel breve periodo.

Da sapere per l'esame

1. Distinguere profitto contabile ed economico; calcolare π_{econ} includendo tutti i costi di opportunità.
2. Impostare il problema $\max_Q \{PQ - C(Q)\}$ e derivare la CPO $P = MC(Q^*)$.
3. Verificare la CSO: $MC'(Q^*) > 0$ (massimo, non minimo del profitto).
4. Con radici multiple della CPO: selezionare quella con MC crescente; se necessario, confrontare i valori di profitto.
5. Calcolare il profitto come area: $\pi = [P - AC(Q^*)] \cdot Q^*$.
6. Derivare e applicare la condizione di shutdown di BP: $P \geq AVC_{\min}$ (i costi fissi sono sunk).
7. Distinguere BP ($P \geq AVC_{\min}$) da LP ($P \geq AC_{\min}$).
8. Classificare la situazione nelle quattro zone della Proposizione 9.6.

Capitolo 10

Offerta dell'Impresa e Offerta di Mercato

10.1 Dalla scelta ottima alla curva di offerta

Nel capitolo precedente abbiamo risolto il problema dell'impresa per un dato prezzo P : trovare Q^* tale che $P = MC(Q^*)$ con $MC'(Q^*) > 0$. Ora facciamo un passo concettuale diverso: *lasciamo variare P* e studiamo come cambia Q^* .

Idea chiave

La curva di offerta individuale non è una relazione tecnologica né una scelta arbitraria: è la raccolta di tutte le quantità ottime che l'impresa sceglie per ogni possibile prezzo di mercato. È il risultato sintetico del problema di massimizzazione del profitto.

Definizione 10.1 (Curva di offerta individuale di breve periodo).

La **curva di offerta individuale di breve periodo** è la funzione $Q^s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ definita da:

$$Q^s(P) = \begin{cases} Q^* : MC(Q^*) = P, MC'(Q^*) > 0 & \text{se } P \geq AVC_{\min} \\ 0 & \text{se } P < AVC_{\min} \end{cases}$$

Equivalentemente, la sua **forma inversa** è:

$$P^s(Q) = MC(Q) \quad \text{per } Q \geq Q_{\min}^{AVC}$$

dove Q_{\min}^{AVC} è la quantità che minimizza AVC .

Osservazione 10.1 (Forma diretta vs. forma inversa).

Le due forme descrivono la stessa curva:

- la **forma diretta** $Q^s(P)$ è utile negli esercizi numerici (dato il prezzo, trova la quantità);
- la **forma inversa** $P^s(Q) = MC(Q)$ è utile per i grafici con P in verticale e per il calcolo del surplus del produttore.

In forma inversa, la curva di offerta *coincide* con la MC nel tratto rilevante.

Errore comune —

La curva di offerta **non** coincide con tutta la curva MC . Sotto AVC_{\min} l'impresa fa shutdown: quei punti della MC non corrispondono a quantità effettivamente offerte. Solo il tratto crescente di MC al di sopra di AVC_{\min} costituisce la curva di offerta.

10.2 Derivazione analitica

10.2.1 Procedura operativa

Proposizione 10.1 (Checklist per la curva di offerta individuale). *Data una funzione di costo $C(Q) = FC + VC(Q)$:*

1. Calcola $MC(Q) = C'(Q)$.
2. Calcola $AVC(Q) = VC(Q)/Q$.
3. Trova AVC_{\min} minimizzando AVC (ovvero imponendo $AVC'(Q) = 0$, oppure osservando dove $MC = AVC$).
4. Risolvi $P = MC(Q)$ rispetto a Q .
5. Seleziona il ramo con $MC'(Q) > 0$.
6. Imponi la condizione di dominio $P \geq AVC_{\min}$.

10.2.2 Caso con costo quadratico (forma chiusa semplice)

Esempio analitico

Offerta con $C(Q) = Q^2 + 4Q + 9$

1. $MC = 2Q + 4$.
2. $VC = Q^2 + 4Q$, quindi $AVC = Q + 4$.
3. AVC è strettamente crescente ($AVC' = 1 > 0$), quindi $AVC_{\min} = \lim_{Q \rightarrow 0^+} AVC = 4$ (raggiunto all'intercetta).
4. Poniamo $P = 2Q + 4$, dunque $Q = (P - 4)/2$.
5. $MC' = 2 > 0$ sempre: unica soluzione, già sul ramo crescente.
6. Condizione di shutdown: $P \geq 4$.

Curva di offerta:

$$Q^s(P) = \frac{P - 4}{2}, \quad P \geq 4.$$

Verifica al break-even: AC_{\min} si trova da $MC = AC$:

$$2Q + 4 = Q + 4 + \frac{9}{Q} \Rightarrow Q^2 = 9 \Rightarrow Q = 3, \quad AC(3) = 3 + 4 + 3 = 10.$$

Dunque $AC_{\min} = 10$ e il break-even di LP è a $P = 10$, $Q^* = 3$.

10.2.3 Caso con costo cubico (radici multiple)

Esempio analitico

Offerta con $C(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 10$

Dal capitolo precedente: $MC = 3Q^2 - 12Q + 15$, $AVC_{\min} = 6$.

Ponendo $P = MC$:

$$3Q^2 - 12Q + 15 = P \Rightarrow Q^2 - 4Q + \frac{15 - P}{3} = 0 \Rightarrow Q = 2 \pm \sqrt{\frac{P - 3}{3}}$$

(la radice è reale per $P \geq 3$).

$MC'(Q) = 6Q - 12 > 0$ iff $Q > 2$, quindi selezioniamo il ramo $Q = 2 + \sqrt{(P - 3)/3}$. Con la condizione di shutdown $P \geq 6$:

$$Q^s(P) = 2 + \sqrt{\frac{P - 3}{3}}, \quad P \geq 6.$$

Verifica: $P = 6 \Rightarrow Q^s = 2 + \sqrt{1} = 3$ (punto di shutdown).

$P = 15 \Rightarrow Q^s = 2 + \sqrt{4} = 4$. ✓

10.3 Proprietà della curva di offerta

10.3.1 Monotonia: la curva di offerta è crescente

Proposizione 10.2 (Legge dell'offerta). *La curva di offerta individuale di BP è strettamente crescente:*

$$\frac{dQ^s}{dP} = \frac{1}{MC'(Q^s(P))} > 0.$$

Idea della dimostrazione

La quantità ottima soddisfa l'identità $P \equiv MC(Q^s(P))$ per ogni $P \geq AVC_{\min}$. Differenziando entrambi i membri rispetto a P :

$$1 = MC'(Q^s(P)) \cdot \frac{dQ^s}{dP} \Rightarrow \frac{dQ^s}{dP} = \frac{1}{MC'(Q^s(P))}.$$

La CSO garantisce $MC'(Q^s) > 0$, dunque $dQ^s/dP > 0$. La pendenza della curva di offerta è l'inverso della pendenza di MC nel punto ottimale.

Osservazione 10.2.

Questo risultato formalizza ciò che la CSO già suggeriva: se MC è più ripida (cresce più velocemente), la quantità offerta risponde meno alle variazioni di prezzo; se MC è più piatta, la risposta è maggiore.

10.3.2 Il teorema dell'involuppo e la funzione di profitto indiretta

Teorema dell'involuppo applicato al profitto

Definiamo la **funzione di profitto indiretta** (o massimizzata):

$$\Pi^*(P) = \max_{Q \geq 0} \{PQ - C(Q)\} = PQ^s(P) - C(Q^s(P)).$$

Il **teorema dell'involuppo** afferma che la derivata di Π^* rispetto al parametro P si calcola come se Q fosse tenuto fisso al valore ottimo:

$$\frac{d\Pi^*}{dP} = \frac{\partial}{\partial P} [PQ - C(Q)]_{Q=Q^s(P)} = Q^s(P).$$

Interpretazione (Lemma di Hotelling per l'impresa competitiva): la curva di offerta individuale è la derivata della funzione di profitto indiretta rispetto al prezzo. In altri termini, un aumento di prezzo dP aumenta il profitto massimizzato di $Q^s(P) \cdot dP$: ogni unità prodotta vale dP in più.

Perché la dimostrazione diretta è valida:

$$\frac{d\Pi^*}{dP} = Q^s + P \frac{dQ^s}{dP} - C'(Q^s) \frac{dQ^s}{dP} = Q^s + \underbrace{[P - MC(Q^s)]}_{=0 \text{ per CPO}} \frac{dQ^s}{dP} = Q^s(P).$$

Il termine in parentesi si annulla grazie alla CPO: non occorre conoscere dQ^s/dP .

Questo risultato ha una conseguenza importante: poiché $\Pi^*(P)$ è convessa in P (somma di funzioni lineari in P), la sua derivata $Q^s(P)$ è crescente — ritrovando la legge dell'offerta per un'altra via.

10.4 Movimenti lungo la curva e spostamenti della curva

Definizione 10.2 (Movimento lungo la curva di offerta).

Un **movimento lungo la curva** avviene quando cambia il prezzo del bene P , lasciando invariata la funzione di costo $C(Q)$. Cambia la quantità offerta, ma la *curva* rimane la stessa.

Definizione 10.3 (Spostamento della curva di offerta).

Un **spostamento della curva** avviene quando cambia la funzione di costo $C(Q)$ (per variazione del costo dei fattori w , r , o della tecnologia). A ogni dato prezzo, l'impresa offre ora una quantità diversa.

Causa	Movimento lungo S	Spostamento di S
Prezzo del bene P	✓	
Prezzo dei fattori (w , r)		✓
Cambiamento tecnologico		✓
Imposta specifica su unità di output		✓
Aumento del costo fisso (BP)		— (no)

Osservazione 10.3 (I costi fissi non spostano l'offerta individuale di BP).

In breve periodo, un aumento del costo fisso non modifica MC né AVC : la CPO $P = MC(Q^*)$ rimane invariata. La quantità ottima non cambia. Cambia solo il livello del profitto (di $-\Delta FC$). Nel lungo periodo, tuttavia, un costo fisso più elevato implica AC_{\min} più alta, il che può spingere alcune imprese a uscire dal mercato, riducendo l'offerta *di mercato*.

Esempio

Aumento del costo del lavoro

Supponiamo che i salari aumentino, modificando MC da $2Q + 4$ a $2Q + 7$.

- Prima: $Q^s = (P - 4)/2$.
- Dopo: $Q^{s'} = (P - 7)/2$ (con $P \geq 7$ come nuova soglia di shutdown).

A ogni prezzo (per esempio $P = 10$) l'impresa offre meno: $Q^s = 3$ diventa $Q^{s'} = 1.5$. La curva di offerta si sposta a *sinistra*.

10.5 Offerta di mercato: aggregazione orizzontale**10.5.1 Principio di aggregazione**

In concorrenza perfetta tutte le imprese fronteggiano lo stesso prezzo P . Ciascuna sceglie la propria quantità ottima $Q_i^s(P)$ indipendentemente dalle altre. La quantità totale di mercato è la somma delle quantità individuali.

Definizione 10.4 (Offerta di mercato).

Con n imprese indicizzate da $i = 1, \dots, n$, la **curva di offerta di mercato** è:

$$Q_{\text{mkt}}^S(P) = \sum_{i=1}^n Q_i^s(P)$$

L'aggregazione è **orizzontale**: per ogni prezzo P si sommano le quantità (non i prezzi).

Osservazione 10.4.

L'aggregazione è orizzontale perché, nel piano (Q, P) con P sull'asse verticale, "fissare un prezzo e sommare le quantità" corrisponde a muoversi orizzontalmente da una curva all'altra. Non si sommano i prezzi.

10.5.2 Imprese identiche

Proposizione 10.3 (Aggregazione con n imprese identiche). *Se tutte le imprese hanno la stessa curva di offerta $Q^s(P)$ e il loro numero è n :*

$$Q_{\text{mkt}}^S(P) = n \cdot Q^s(P).$$

La forma inversa dell'offerta di mercato si ottiene sostituendo $Q_{\text{mkt}} = nQ^s$: se $P = P^s(Q^s)$, allora $P = P^s(Q_{\text{mkt}}/n)$.

Esempio analitico

10 imprese identiche con $Q_i^s = (P - 4)/2$

$$Q_{\text{mkt}}^S = 10 \cdot \frac{P - 4}{2} = 5(P - 4) = 5P - 20, \quad P \geq 4.$$

Forma inversa: $P = Q_{\text{mkt}}/5 + 4$.

A $P = 10$: singola impresa offre $Q_i^s = 3$; mercato offre $Q^S = 30$. La curva di mercato è più piatta (stessa pendenza nella forma Q_P^s , ma scala $\times 10$).

10.5.3 Imprese eterogenee e kink

Quando le imprese differiscono per costi, soglie di shutdown diverse implicano che non tutte producono agli stessi prezzi. La curva di mercato presenta allora un **kink** (punto di cambio di pendenza).

Proposizione 10.4 (Kink nella curva di mercato). *Supponiamo due gruppi: n_A imprese di tipo A con soglia P_A e n_B imprese di tipo B con soglia $P_B > P_A$. Allora:*

$$Q_{mkt}^S(P) = \begin{cases} n_A \cdot Q_A^s(P) & \text{se } P_A \leq P < P_B \\ n_A \cdot Q_A^s(P) + n_B \cdot Q_B^s(P) & \text{se } P \geq P_B \end{cases}$$

A $P = P_B$ si forma un kink: la curva di offerta di mercato diventa più piatta (più elastica) perché entrano nuovi produttori.

Esempio analitico

50 imprese di tipo A e 30 di tipo B

Tipo A: $MC_A = 2Q_A$, $AVC_{\min}^A = 0$, quindi $Q_A^s = P/2$ per $P > 0$.

Tipo B: $MC_B = 4Q_B$, $AVC_{\min}^B = 0$, quindi $Q_B^s = P/4$ per $P > 0$.

Poiché entrambi i tipi hanno $AVC_{\min} = 0$, entrano subito per $P > 0$:

$$Q_{mkt}^S = 50 \cdot \frac{P}{2} + 30 \cdot \frac{P}{4} = 25P + 7.5P = 32.5P.$$

Forma inversa: $P = Q_{mkt}^S / 32.5$.

Con imprese eterogenee che entrano a prezzi diversi: se il tipo B avesse invece $AVC_{\min}^B = 10$, allora:

$$Q_{mkt}^S(P) = \begin{cases} 25P & \text{se } 0 < P < 10 \\ 25P + 7.5P = 32.5P & \text{se } P \geq 10 \end{cases}$$

con un kink a $P = 10$.

Intuizione economica

Il kink segnala un cambiamento nella composizione del mercato: a prezzi bassi, solo le imprese più efficienti (tipo A) producono; superata la soglia P_B , entrano anche le imprese meno efficienti (tipo B), e l'offerta totale cresce più rapidamente perché due gruppi reagiscono simultaneamente all'aumento di prezzo.

10.6 Elasticità dell'offerta

10.6.1 Definizione e calcolo

Definizione 10.5 (Elasticità dell'offerta rispetto al prezzo).

$$\varepsilon_S = \frac{dQ^s}{dP} \cdot \frac{P}{Q^s} = \frac{\% \Delta Q^s}{\% \Delta P} \geq 0.$$

Misura la reattività percentuale della quantità offerta a una variazione percentuale del prezzo.

Proposizione 10.5 (Elasticità e forma della curva). 1. Per una curva di offerta lineare $Q^s = aP + b$ con $a > 0$:

$$\varepsilon_S = a \cdot \frac{P}{aP + b} = \frac{aP}{Q^s}.$$

L'elasticità varia lungo la curva anche se la pendenza è costante.

2. Se $b = 0$ (retta per l'origine, $Q^s = aP$):

$$\varepsilon_S = a \cdot \frac{P}{aP} = 1 \quad \forall P.$$

Ogni retta di offerta passante per l'origine ha elasticità unitaria costante.

3. Curva verticale ($Q^s = \bar{Q}$): $\varepsilon_S = 0$ (offerta perfettamente anelastica).

4. Curva orizzontale ($P = \bar{P}$): $\varepsilon_S \rightarrow +\infty$ (offerta perfettamente elastica).

ε_S	Denominazione	Forma della curva
0	Perfettamente anelastica	Verticale
$0 < \varepsilon_S < 1$	Anelastica	Ripida
1	Elasticità unitaria	Retta per l'origine
$\varepsilon_S > 1$	Elastica	Piatta
$\rightarrow +\infty$	Perfettamente elastica	Orizzontale

Esempio analitico

Calcolo dell'elasticità con $Q^s = 3P - 12$ ($P \geq 4$)

$dQ^s/dP = 3$.

A $P = 8$: $Q^s = 12$, $\varepsilon_S = 3 \cdot 8/12 = 2$ (elastica).

A $P = 12$: $Q^s = 24$, $\varepsilon_S = 3 \cdot 12/24 = 1.5$ (elastica, ma meno).

In generale: $\varepsilon_S = 3P/(3P - 12) = P/(P - 4)$. All'aumentare di P , $\varepsilon_S \rightarrow 1$ (la curva diventa meno elastica verso l'alto, tendendo al comportamento di una retta per l'origine).

Osservazione 10.5 (Pendenza ed elasticità non sono la stessa cosa).

La pendenza di $Q^s(P)$ è costante per una curva lineare, ma l'elasticità varia perché dipende anche dal rapporto P/Q^s . Due curve con la stessa pendenza ma intercette diverse hanno elasticità diverse. Confondere pendenza ed elasticità è un errore frequente da evitare.

10.6.2 Determinanti dell'elasticità

Idea chiave

L'elasticità dell'offerta dipende da quanto è facile espandere la produzione.

- **Alta elasticità:** costo marginale poco crescente; fattori produttivi abbondanti e facilmente reperibili; capacità produttiva inutilizzata; possibilità di entrata rapida di nuove imprese.
- **Bassa elasticità:** costo marginale steeply increasing; fattori produttivi specializzati e scarsi; impianti operanti a piena capacità; lunghi tempi di costruzione di nuova capacità.

Proposizione 10.6 (Breve vs. lungo periodo). *L'elasticità dell'offerta è generalmente **maggiore in lungo periodo** che in breve periodo, per due ragioni:*

1. In LP tutti i fattori sono variabili: la curva MC di lungo periodo è più piatta di quella di BP (maggiore flessibilità nell'uso degli input).
2. In LP le imprese possono entrare o uscire dal mercato: una variazione di prezzo induce variazioni sia nella quantità di ciascuna impresa sia nel numero di imprese attive.

10.7 Esercizi

Esercizio 10.1.

Un'impresa ha $C(Q) = 3Q^2 + 6Q + 12$.

- Calcola MC , AVC , AVC_{\min} , AC e AC_{\min} .
- Ricava la curva di offerta $Q^s(P)$ in forma analitica.
- Costruisci la tabella per $P \in \{12, 18, 24, 30\}$: Q^* , π , decisione BP, decisione LP.
- Calcola l'elasticità dell'offerta a $P = 18$ e $P = 30$. Come varia ε_S all'aumentare di P ?

Esercizio 10.2.

Nel mercato ci sono 60 imprese di tipo A con $C_A = Q_A^2$ e 40 imprese di tipo B con $C_B = 2Q_B^2$ (entrambi con $AVC_{\min} = 0$).

- Ricava $Q_A^s(P)$ e $Q_B^s(P)$.
- Scrivi l'offerta di mercato $Q^S(P)$ e la sua forma inversa.
- Calcola Q^S per $P \in \{5, 10, 20\}$.
- Se le imprese di tipo A diventano 120, come cambia la curva di mercato? La curva diventa più piatta o più ripida? Calcola la nuova ε_S di mercato a $P = 10$ nel caso originale e nel caso modificato.

Esercizio 10.3.

Nel mercato ci sono 80 imprese di tipo A ($MC_A = 2Q_A$, $AVC_{\min}^A = 0$) e 20 imprese di tipo B ($MC_B = Q_B$, $AVC_{\min}^B = 8$).

- Scrivi le offerte individuali $Q_A^s(P)$ e $Q_B^s(P)$.
- Scrivi l'offerta di mercato $Q^S(P)$, distinguendo le due zone. Per quale valore di P si forma il kink?
- Calcola Q^S per $P \in \{4, 8, 16\}$.
- L'elasticità dell'offerta di mercato è maggiore prima o dopo il kink? Giustifica usando la formula di ε_S .

Esercizio 10.4 (Teorema dell'involuppo).

Un'impresa ha $C(Q) = Q^2 + 4Q + 9$, quindi $Q^s(P) = (P - 4)/2$ e $\Pi^*(P) = P(P - 4)/2 - [(P - 4)/2]^2 - 4(P - 4)/2 - 9$.

- Semplifica l'espressione di $\Pi^*(P)$ in funzione di P .
- Calcola $d\Pi^*/dP$ direttamente. Verifica che coincide con $Q^s(P)$.
- Calcola $d^2\Pi^*/dP^2$. Qual è il suo segno? Cosa implica sulla convessità di Π^* e sulla monotonia di Q^s ?

Esercizio 10.5 (Elasticità e spostamenti).

Un'impresa ha curva di offerta $Q^s = 5P - 10$ per $P \geq 2$.

- Calcola ε_S a $P = 4$ e $P = 10$.
- Se un aumento dei costi variabili sposta la curva a $Q^{s'} = 5P - 15$ (con $P \geq 3$), come cambia ε_S a $P = 10$?

- c) Se invece i costi fissi aumentano (a parità di MC), come cambia la curva di offerta? Giustifica analiticamente.

Da sapere per l'esame

1. Definire la curva di offerta individuale di BP come tratto crescente di MC sopra AVC_{\min} ; ricavarla invertendo la CPO $P = MC(Q)$.
2. Selezionare il ramo corretto quando $P = MC$ ha due soluzioni (CSO: $MC' > 0$).
3. Distinguere movimento lungo la curva (cambio di P) da spostamento (cambio di costi variabili o tecnologia).
4. Aggregare orizzontalmente le offerte individuali per costruire l'offerta di mercato; gestire il caso con imprese eterogenee e kink.
5. Spiegare perché un aumento dei costi fissi non sposta la curva di offerta individuale di BP.
6. Calcolare l'elasticità dell'offerta $\varepsilon_S = (dQ^s/dP) \cdot (P/Q^s)$ e riconoscere i casi speciali (retta per l'origine: $\varepsilon_S = 1$; verticale: $\varepsilon_S = 0$; orizzontale: $\varepsilon_S \rightarrow \infty$).
7. Spiegare perché l'offerta è più elastica in lungo periodo che in breve periodo.

Capitolo 11

Alla prossima settimana....

Appendice A

Matematica di base per la microeconomia

A.1 Derivate fondamentali

Funzione $f(x)$	Derivata $f'(x)$
c (costante)	0
x^n	nx^{n-1}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

Tabella A.1: Regole base di derivazione rilevanti per la microeconomia.

Prodotto:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Rapporto:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Catena:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esempio analitico

$$f(x) = x^2 \ln x$$
$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x.$$

A.2 Derivate parziali

Quando una funzione dipende da più variabili, la derivata parziale misura la variazione rispetto a una sola variabile, mantenendo le altre costanti.

Definizione A.1 (Derivata parziale).

Per $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Regola pratica: per calcolare $\partial f/\partial x$, tratta y come una costante e deriva rispetto a x normalmente. Analogamente per $\partial f/\partial y$.

Esempi rilevanti per la microeconomia:

- $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$: $\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta = \frac{\alpha U}{x}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \beta x^\alpha y^{\beta-1} = \frac{\beta U}{y}$.
- $U(x, y) = \ln x + 2 \ln y$: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2}{y}$.
- $f(L, K) = AL^\alpha K^\beta$: $MPL = \frac{\partial f}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1} K^\beta$, $MPK = \frac{\partial f}{\partial K} = \beta AL^\alpha K^{\beta-1}$.

A.3 Massimi e minimi di funzioni di una variabile

Condizione necessaria di primo ordine (CPO/FOC):

$$f'(x^*) = 0.$$

Condizione sufficiente di secondo ordine (CSO/SOC):

$$f''(x^*) < 0 \quad (\text{massimo locale}), \quad f''(x^*) > 0 \quad (\text{minimo locale}).$$

Idea chiave

Le CPO individuano i *candidati* all'ottimo. Le CSO determinano la *natura* del punto critico (massimo, minimo, o flesso).

Esempio analitico

$$\begin{aligned} \pi(q) &= 120q - 2q^2 - 200 \\ \pi'(q) &= 120 - 4q = 0 \quad \Rightarrow \quad q^* = 30. \quad \pi''(q) = -4 < 0 \quad (\text{massimo}). \end{aligned}$$

A.4 Ottimizzazione vincolata e moltiplicatori di Lagrange

In microeconomia quasi tutti i problemi di ottimo sono *vincolati*: il consumatore massimizza $U(x, y)$ soggetto a $p_x x + p_y y = M$; l'impresa minimizza $wL + rK$ soggetto a $f(L, K) = Q$. Il metodo generale è la **Lagrangiana**.

Metodo di Lagrange (massimo vincolato)

Per $\max f(x, y)$ s.t. $g(x, y) = 0$, si definisce:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

Le condizioni del primo ordine (CPO) sono:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad (\equiv g(x, y) = 0).$$

Interpretazione di λ : dalla CPO $\partial \mathcal{L}/\partial x = 0$ si ottiene $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$. Nel problema del consumatore ($g = p_x x + p_y y - M$):

$$MU_x = \lambda p_x \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y}.$$

λ misura l'*utilità marginale del reddito*: quanto aumenta l'utilità ottima se il reddito M aumenta di un euro.

Esempio — **Consumatore con** $U(x, y) = \ln x + 2 \ln y$:

$$\mathcal{L} = \ln x + 2 \ln y - \lambda(p_x x + p_y y - M).$$

CPO:

$$\frac{1}{x} = \lambda p_x, \quad \frac{2}{y} = \lambda p_y, \quad p_x x + p_y y = M.$$

Dividendo le prime due: $\frac{y}{2x} = \frac{p_x}{p_y}$, ossia $MRS = p_x/p_y$. Sostituendo nel vincolo: $x^* = M/(3p_x)$, $y^* = 2M/(3p_y)$ (il consumatore spende 1/3 del reddito in x e 2/3 in y).

Osservazione A.1 (Condizioni del secondo ordine vincolate).

Per un massimo vincolato in due variabili occorre verificare che la matrice Hessiana orlata sia definita negativamente. Nei casi tipici del corso (Cobb–Douglas, funzioni strettamente concave) la CSO è automaticamente soddisfatta in un ottimo interno: è sufficiente verificare le CPO.

A.5 Proprietà di potenze e logaritmi

Potenze

- $x^a x^b = x^{a+b}$
- $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $x^0 = 1$; $x^{-a} = 1/x^a$; $x^{1/2} = \sqrt{x}$

Logaritmi

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^b) = b \ln a$
- $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln x} = x$

Utilità con Cobb–Douglas: Calcolare le utilità marginali di $U(x, y) = x^{0.5}y^{0.5}$:

$$MU_x = 0.5 x^{-0.5} y^{0.5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad MU_y = 0.5 x^{0.5} y^{-0.5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

$$MRS = MU_x/MU_y = y/x.$$

A.6 Funzioni omogenee

Definizione A.2 (Funzione omogenea di grado k).

$f(x, y)$ è omogenea di grado k se, per ogni $t > 0$:

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Test pratico: moltiplica ogni argomento per t , semplifica, e leggi il grado k .

Esempi:

- $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$: $U(tx, ty) = (tx)^\alpha (ty)^\beta = t^{\alpha+\beta} x^\alpha y^\beta = t^{\alpha+\beta} U$. Grado $k = \alpha + \beta$.
- Vincolo di bilancio: l'insieme $B(\lambda M, \lambda p_x, \lambda p_y) = B(M, p_x, p_y)$ perché moltiplicare tutto per λ lascia inalterata la disuguaglianza $p_x x + p_y y \leq M$. La domanda Marshalliana è omogenea di grado 0 in (M, p_x, p_y) .
- Funzione di produzione Cobb–Douglas: omogenea di grado $\alpha + \beta$. Se $\alpha + \beta = 1$: rendimenti costanti di scala.

A.7 Prodotti notevoli

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

Appendice B

Formulario

Questo formulario raccoglie, blocco per blocco, tutte le formule e le condizioni di ottimo trattate nella prima parte del corso. Le condizioni si applicano a soluzioni *interne*; fare sempre la verifica di non negatività e, dove necessario, la verifica della soluzione d'angolo.

B.1 Teoria del consumatore

Utilità marginale e MRS

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad MU_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$MRS_{xy} = -\frac{dy}{dx}\Big|_{\bar{U}} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

MRS decrescente lungo la curva \Leftrightarrow preferenze convesse $\Leftrightarrow \partial^2 U / \partial x^2 < 0$.

Vincolo di bilancio e ottimo del consumatore

$$p_x x + p_y y = M \quad (\text{retta di bilancio; pendenza} = -p_x/p_y)$$

Condizione di ottimo interno:

$$\boxed{MRS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}} \Leftrightarrow \frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y}$$

Lagrangiana: $\mathcal{L} = U(x, y) - \lambda(p_x x + p_y y - M)$

CPO: $MU_x = \lambda p_x$, $MU_y = \lambda p_y$, $p_x x + p_y y = M$

$\lambda = MU_x/p_x = MU_y/p_y =$ utilità marginale del reddito.

Tre tipi di preferenze

Tipo	Funzione	Ottimo
Cobb-Douglas	$U = x^\alpha y^\beta$	$x^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{M}{p_x}$, $y^* = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{M}{p_y}$
Sostituti perfetti	$U = ax + by$	soluzione d'angolo se $a/b \neq p_x/p_y$
Complementi perfetti	$U = \min\{ax, by\}$	$ax^* = by^*$; ottimo sul vertice $x^* = \frac{bM}{bp_x + ap_y}$, $y^* = \frac{aM}{bp_x + ap_y}$

Soluzione d'angolo (quasi-lineare e altri casi)

Se le CPO interne producono $y^* < 0$ (o $x^* < 0$), la soluzione è d'angolo. Condizione corretta:

$$y^* = 0, \quad x^* = \frac{M}{p_x}, \quad \text{da verificare: } MRS(x^*, 0) \geq \frac{p_x}{p_y}$$

B.2 Domanda individuale ed elasticità**Equazione di Slutsky**

$$\underbrace{\frac{\partial x^D}{\partial p_x}}_{\text{effetto totale}} = \underbrace{\frac{\partial x^c}{\partial p_x}}_{\leq 0 \text{ (sostituzione)}} - \underbrace{x^D \frac{\partial x^D}{\partial M}}_{\text{effetto reddito}}$$

Effetto sostituzione ≤ 0 sempre; effetto reddito ≥ 0 a seconda del tipo di bene.

Le tre elasticità

$$\varepsilon_P = \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q} \quad \varepsilon_M = \frac{\partial Q}{\partial M} \cdot \frac{M}{Q} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial Q_x}{\partial P_y} \cdot \frac{P_y}{Q_x}$$

Elasticità prezzo ε_P **Elasticità reddito ε_M** **Elasticità incrociata**

$|\varepsilon_P| > 1$ elastica $\varepsilon_M < 0$ inferiore $\varepsilon_{xy} > 0$ sostituti

$|\varepsilon_P| < 1$ anelastica $0 < \varepsilon_M < 1$ necessario $\varepsilon_{xy} < 0$ complementi

$|\varepsilon_P| = 1$ unitaria $\varepsilon_M > 1$ lusso

Ricavi totali e ε_P : $RT = P \cdot Q$. $|\varepsilon_P| < 1 \Rightarrow P \uparrow \Rightarrow RT \uparrow$; $|\varepsilon_P| > 1 \Rightarrow P \uparrow \Rightarrow RT \downarrow$; $RT \text{ max} \Leftrightarrow |\varepsilon_P| = 1$.

B.3 Tecnologia e produzione**Funzione di produzione, MP e AP**

$$Q = f(L, K), \quad MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}, \quad MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}, \quad AP_L = \frac{Q}{L}, \quad AP_K = \frac{Q}{K}$$

Regola MP-AP: $MP_L > AP_L \Rightarrow AP_L \nearrow$; $MP_L < AP_L \Rightarrow AP_L \searrow$; $MP_L = AP_L \Rightarrow AP_L$ al massimo.

Cobb-Douglas $Q = AL^\alpha K^\beta$:

$$MP_L = \alpha AL^{\alpha-1} K^\beta, \quad MP_K = \beta AL^\alpha K^{\beta-1}$$

Rendimenti di scala

$$f(tL, tK) \begin{cases} > t f(L, K) & \text{IRS (crescenti)} \\ = t f(L, K) & \text{CRS (costanti)} \\ < t f(L, K) & \text{DRS (decescenti)} \end{cases}$$

Cobb-Douglas: $\alpha + \beta > 1 \Rightarrow \text{IRS}$; $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \text{CRS}$; $\alpha + \beta < 1 \Rightarrow \text{DRS}$.

Attenzione: BP vs LP

Rendimenti marginali decrescenti (BP, un input fisso) e rendimenti di scala (LP, tutti gli input variano) sono concetti **ortogonali**: possono coesistere senza contraddizione.

B.4 Isoquanti, MRTS e minimizzazione dei costi**MRTS e isocosto**

$$MRTS_{LK} = - \left. \frac{dK}{dL} \right|_{\bar{Q}} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

Isocosto: $wL + rK = C \Rightarrow K = C/r - (w/r)L$ (pendenza = $-w/r$).

Condizione di ottimo (min costi):

$$\boxed{MRTS_{LK} = \frac{w}{r}} \Leftrightarrow \frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}$$

Lagrangiana: $\mathcal{L} = wL + rK - \lambda(f(L, K) - \bar{Q})$

CPO: $w = \lambda MP_L$, $r = \lambda MP_K$; $\lambda = w/MP_L = r/MP_K = \text{costo marginale di produzione}$.

Casi particolari: complementi e sostituti perfetti

Tecnologia	Isoquanti	Ottimo
$Q = \min\{aL, bK\}$	curva a L	vertice: $aL^* = bK^* = \bar{Q}$; $MRTS$ non definito
$Q = aL + bK$	rette parallele	sol. d'angolo; $MRTS = a/b$ costante

Con complementi perfetti $MRTS = w/r$ **non si applica**: la funzione non è differenziabile nel vertice; l'ottimo è il vertice dell'isoquante indipendentemente dai prezzi.

B.5 Curve di costo nel breve periodo

Struttura dei costi BP

$$TC(Q) = FC + VC(Q)$$

$$AC(Q) = \frac{TC}{Q} = AFC(Q) + AVC(Q)$$

$$AFC(Q) = \frac{FC}{Q} \quad (\text{sempre decrescente})$$

$$MC(Q) = \frac{dTC}{dQ} = \frac{dVC}{dQ}$$

Regola MC-AC: $MC < AC \Rightarrow AC \searrow$; $MC > AC \Rightarrow AC \nearrow$; $MC = AC \Rightarrow AC$ al minimo.
La stessa regola vale per MC e AVC .

Scala minima efficiente (SME)

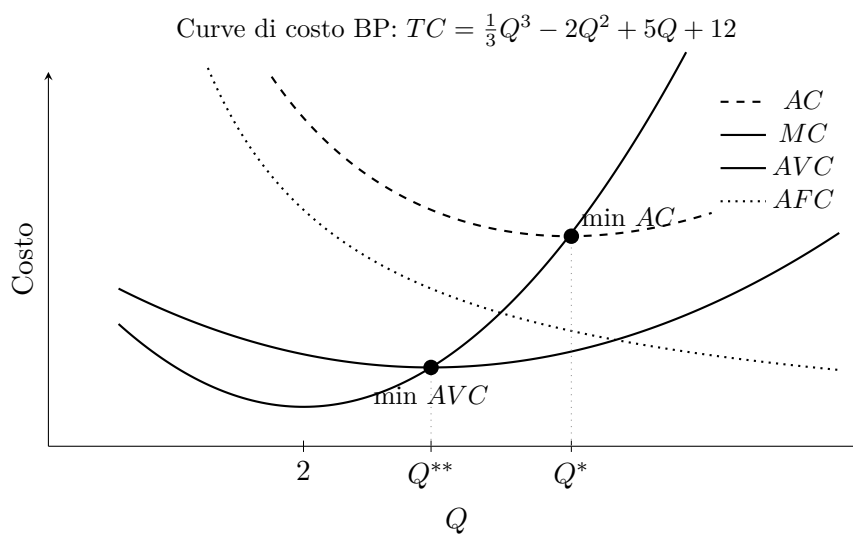
$$\frac{dAC}{dQ} = 0 \Leftrightarrow MC(Q^*) = AC(Q^*)$$

Esempio con $TC = F + cQ^2$:

$$MC = 2cQ, \quad AC = \frac{F}{Q} + cQ \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{F}{c}}$$

Effetti di shock: $F \uparrow$ $AC \uparrow$, MC invariato $Q^* \uparrow$
 $c \uparrow$ $AC \uparrow$, $MC \uparrow$ $Q^* \downarrow$

Nota: il minimo di AVC precede sempre quello di AC ($Q^{**} < Q^*$), perché AFC decrescente sposta il minimo di AC verso destra.



B.6 Costi nel lungo periodo e curva LAC

Curva LAC : inviluppo inferiore

$$LAC(Q) = \min_K AC_{BP}(Q; K)$$

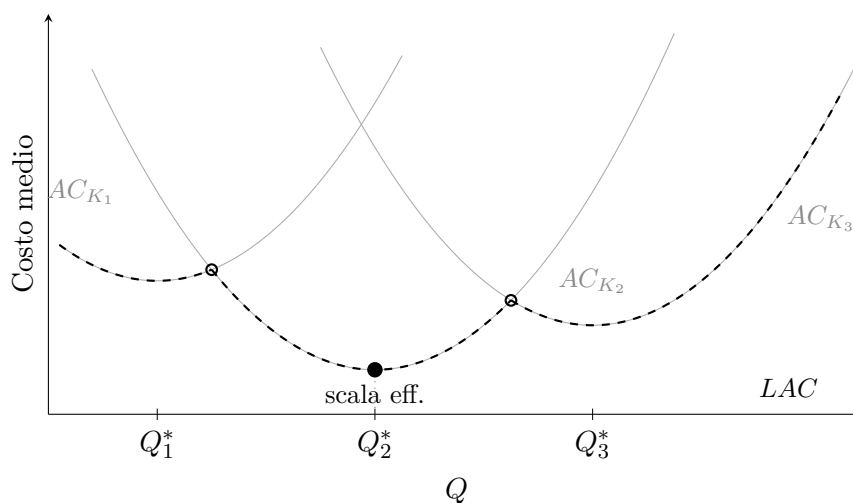
La LAC tocca ciascuna curva AC di BP esattamente in un punto e **non può stare al di sotto** di nessuna di esse.

LAC decrescente \Leftrightarrow economie di scala (IRS)

LAC crescente \Leftrightarrow diseconomie di scala (DRS)

Minimo di LAC = scala efficiente di lungo periodo

LAC come inviluppo inferiore delle AC di BP



Condizione affinché la LAC sia un inviluppo corretto

La LAC deve soddisfare $LAC(Q) \leq AC_K(Q)$ per ogni Q e per ogni K . Se si disegnano le AC_{BP} e la LAC come oggetti *indipendenti*, si ottiene quasi sempre un grafico sbagliato: le curve devono condividere gli stessi parametri funzionali e la LAC deve coincidere con la AC_{BP} che domina in ciascun intervallo di Q .

B.7 Condizioni di ottimo

Riepilogo

Problema	Condizione di ottimo	Note
Ottimo consumatore	$MRS_{xy} = p_x/p_y$	$\Leftrightarrow MU_x/p_x = MU_y/p_y$
Cobb-Douglas	$x^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{M}{p_x}$	quota di spesa costante
Slutsky	$\partial x^D / \partial p_x = \partial x^c / \partial p_x - x^D \partial x^D / \partial M$	eff. sostituzione ≤ 0
Elasticità prezzo	$\varepsilon_P = \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q}$	RT max se $ \varepsilon_P = 1$
Regola MP-AP	$MP_L \geq AP_L \Rightarrow AP_L \nearrow \searrow$	max AP_L dove $MP_L = AP_L$
MRTS	MP_L/MP_K	ottimo: $MRTS = w/r$
Rendimenti di scala (C-D)	$\alpha + \beta \geq 1$	IRS / CRS / DRS
Scala minima efficiente	$MC(Q^*) = AC(Q^*)$	$Q^* = \sqrt{F/c}$ se $TC = F + cQ^2$
Min costi LP	$MRTS = w/r$	$LAC =$ inviluppo inferiore

Appendice C

Soluzioni degli esercizi

Le soluzioni sono organizzate capitolo per capitolo, nello stesso ordine in cui gli esercizi compaiono nel testo. Per gli esercizi a carattere qualitativo o grafico viene fornita una risposta argomentata; per quelli numerici viene mostrato il procedimento completo.

Capitolo 1 – Metodo economico e strumenti di base

Esercizio 1.1. Nella FPP $B = 20 - A$, il costo opportunità di produrre un'unità in più di A è la pendenza della retta in valore assoluto, cioè 1 unità di B . Geometricamente: sull'intercetta orizzontale ($A = 20, B = 0$) si produce solo A ; sull'intercetta verticale ($A = 0, B = 20$) solo B . Rinunciare a un'unità di A libera le risorse per produrre esattamente una unità di B .

Esercizio 1.2.

$$f(x) = 4x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 8x + 3.$$

Esercizio 1.3.

$$\pi(q) = 60q - 6q^2 - 100 \Rightarrow \pi'(q) = 60 - 12q = 0 \Rightarrow q^* = 5.$$

Verifica CSO: $\pi''(q) = -12 < 0$ (massimo). ✓

Esercizio 1.4. Un sunk cost è già stato sostenuto e non è recuperabile: la scelta futura non può modificarlo. Includerlo nel calcolo costi-benefici porterebbe a decisioni distorte (es. continuare un progetto in perdita solo perché si è già investito molto). La regola corretta è: confronta solo costi e benefici *futuri*.

Esercizio 1.5. FPP: $B = 12 - 0.25A$.

- Intercetta verticale ($A = 0$): $B = 12$.
- Intercetta orizzontale ($B = 0$): $A = 12/0.25 = 48$.
- Pendenza: -0.25 . Interpretazione: produrre un'unità in più di A costa 0.25 unità di B . Equivalentemente, 4 unità di A costano 1 unità di B .

Capitolo 2 – Preferenze, utilità e MRS

Esercizio 2.1. $U(x, y) = x^2y$. Le utilità marginali sono:

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 2xy, \quad MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = x^2.$$

Quindi:

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{2xy}{x^2} = \frac{2y}{x}.$$

Il MRS è decrescente in x e crescente in y : man mano che il consumatore aumenta x (a y fissato), la sua disponibilità a cedere y in cambio di x diminuisce.

Esercizio 2.2. Due funzioni rappresentano le stesse preferenze se e solo se una è trasformazione monotona crescente dell'altra. Verifichiamo che $V = f(U) = 2U + 5$ con $f' = 2 > 0$:

$$V(x, y) = 2xy + 5 = 2U(x, y) + 5.$$

Sì, V è trasformazione monotona crescente di U , quindi rappresentano le stesse preferenze. In particolare, $A \succcurlyeq B \iff U(A) \geq U(B) \iff V(A) \geq V(B)$.

Esercizio 2.3. La convessità delle preferenze afferma che le miscele sono almeno tanto buone quanto gli estremi. Ciò implica che, lungo una curva di indifferenza, più si consuma di un bene (cedendo dell'altro), meno si è disposti a cederne ulteriormente: il MRS diminuisce. Formalmente, se U è strettamente quasi-concava, il MRS è strettamente decrescente in x lungo l'isoquanto.

Esercizio 2.4. FPP $B = 12 - 0.25A$:

- (i) intercetta su B : 12; intercetta su A : 48.
- (ii) pendenza = -0.25 : il costo opportunità di un'unità di A è 0.25 unità di B .

Esercizio 2.5. Per monotonicità, "più è meglio": se si aggiunge x a parità di y , il benessere aumenta. Supponiamo per assurdo che una curva di indifferenza abbia pendenza positiva in un punto: muoversi lungo di essa verso destra-alto significa avere più di entrambi i beni, quindi per monotonicità il nuovo paniere è strettamente preferito al vecchio, contraddicendo l'ipotesi che si trovino sulla stessa curva. Dunque la pendenza deve essere negativa.

Esercizio 2.6. $U(x, y) = x^{0.4}y^{0.6}$.

$$MU_x = 0.4x^{-0.6}y^{0.6}, \quad MU_y = 0.6x^{0.4}y^{-0.4}.$$

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{0.4}{0.6} \cdot \frac{y}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{y}{x}.$$

Capitolo 3 – Vincolo di bilancio e scelta ottima

Esercizio 3.1. $M = 60$, $p_x = 10$, $p_y = 3$.

(i) Vincolo: $10x + 3y = 60$; in forma esplicita $y = 20 - \frac{10}{3}x$. Intercetta verticale: $y = 20$ (quando $x = 0$). Intercetta orizzontale: $x = 6$ (quando $y = 0$). Pendenza: $-10/3 \approx -3.33$.

(ii) Verifica accessibilità ($p_x x + p_y y \leq 60$):

- $(3, 10)$: $10 \cdot 3 + 3 \cdot 10 = 60 \leq 60$. **Accessibile** (sulla retta).
- $(2, 8)$: $10 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 44 \leq 60$. **Accessibile** (interno).
- $(5, 15)$: $10 \cdot 5 + 3 \cdot 15 = 95 > 60$. **Non accessibile**.

(iii) L'insieme di bilancio è il triangolo con vertici $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(0, 20)$.

Esercizio 3.2. Se il reddito passa da M a $M' = 1.5M$ con prezzi invariati, la nuova retta è:

$$y = \frac{1.5M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x.$$

La pendenza $-p_x/p_y$ è invariata (i prezzi non cambiano). Entrambe le intercette aumentano del 50%: $M'/p_y = 1.5M/p_y$ e $M'/p_x = 1.5M/p_x$. La retta si sposta *parallelamente* verso l'esterno.

Esercizio 3.3. $U(x, y) = x^{0.5}y^{0.5}$, $p_x = 10$, $p_y = 5$, $M = 100$.

Metodo della sostituzione. Dal vincolo: $y = (100 - 10x)/5 = 20 - 2x$. Sostituendo: $\tilde{U}(x) = x^{0.5}(20 - 2x)^{0.5}$. Per massimizzare, equivale a massimizzare $x(20 - 2x)$:

$$\frac{d}{dx}[x(20 - 2x)] = 20 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = 5.$$

$$y^* = 20 - 2 \cdot 5 = 10.$$

Metodo di Lagrange.

$$\mathcal{L} = x^{0.5}y^{0.5} - \lambda(10x + 5y - 100).$$

CPO:

$$\frac{0.5 y^{0.5}}{x^{0.5}} = 10\lambda, \quad \frac{0.5 x^{0.5}}{y^{0.5}} = 5\lambda, \quad 10x + 5y = 100.$$

Dividendo la prima per la seconda: $y/x = 10/5 = 2$, cioè $y = 2x$. Sostituendo nel vincolo: $10x + 5(2x) = 100 \Rightarrow 20x = 100 \Rightarrow x^* = 5$, $y^* = 10$. $\lambda = \frac{0.5\sqrt{10/5}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{20} \approx 0.0707$ (utilità marginale del reddito).

Verifica: $MRS = y/x = 10/5 = 2 = p_x/p_y = 10/5$. ✓

Esercizio 3.4. $U(x, y) = 2x + 3y$, $p_x = 5$, $p_y = 4$, $M = 100$.

(i) $MRS = MU_x/MU_y = 2/3$; $p_x/p_y = 5/4 = 1.25$.

(ii) Poiché $MRS = 2/3 < 5/4 = p_x/p_y$: il consumatore valuta relativamente poco x rispetto al suo prezzo. Conviene spendere tutto in y : **soluzione d'angolo** su y .

(iii) Paniere ottimo: $x^* = 0$, $y^* = M/p_y = 100/4 = 25$.

Capitolo 4 – Domanda individuale, statica comparata ed elasticità

Esercizio 4.1. $x^D(p, M) = 20 - 2p + 0.1M$, $p = 5$, $M = 100$.

(i) $x^D = 20 - 2(5) + 0.1(100) = 20 - 10 + 10 = 20$.

(ii) $\partial x^D/\partial p = -2$; $\partial x^D/\partial M = 0.1$.

(iii) Equazione di Slutsky:

$$\frac{\partial x^c}{\partial p} = \frac{\partial x^D}{\partial p} + x^D \frac{\partial x^D}{\partial M} = -2 + 20 \cdot 0.1 = -2 + 2 = 0.$$

L'effetto di sostituzione è nullo: l'effetto reddito compensa esattamente l'effetto prezzo totale.

(iv) L'effetto totale (-2) si scompone in: ES = 0 (prezzo relativo invariato a utilità costante) e ER = $-x^D \cdot \partial x^D/\partial M = -20 \cdot 0.1 = -2$ (la perdita di potere d'acquisto reale riduce la domanda di 2 unità).

Esercizio 4.2. $Q = 100 - 2P$.

(i) $\varepsilon(P) = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -2 \cdot \frac{P}{100 - 2P}$.

(ii)

- $P = 10$: $Q = 80$, $\varepsilon = -2 \cdot 10/80 = -0.25$. $|\varepsilon| = 0.25 < 1$: **anelastica**.
- $P = 40$: $Q = 20$, $\varepsilon = -2 \cdot 40/20 = -4$. $|\varepsilon| = 4 > 1$: **elastica**.

(iii) $RT = P \cdot Q = P(100 - 2P) = 100P - 2P^2$. $\frac{dRT}{dP} = 100 - 4P = 0 \Rightarrow P^* = 25$. Verifica: $\varepsilon(25) = -2 \cdot 25/50 = -1$, quindi $|\varepsilon| = 1$. ✓

Esercizio 4.3. $x^D(p_x, p_y, M) = 20 - 2p_x + p_y + 0.01M$.

(i) $\partial x^D / \partial p_y = 1 > 0$: i beni sono **sostituti** (un aumento del prezzo di y sposta domanda verso x).

(ii) A $p_y = 3$, $p_x = 5$, $M = 100$:

$$x^D = 20 - 10 + 3 + 1 = 14.$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial x^D}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{x^D} = 1 \cdot \frac{3}{14} \approx 0.214.$$

Capitolo 5 – Tecnologia e Produzione

Esercizio 5.1. $Q = L^{0.5}K^{0.5}$.

(a)

$$MPL = \frac{\partial Q}{\partial L} = 0.5 L^{-0.5} K^{0.5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{L}}, \quad MPK = 0.5 L^{0.5} K^{-0.5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{K}}.$$

(b) Rendimenti di scala:

$$f(tL, tK) = (tL)^{0.5}(tK)^{0.5} = t^{0.5+0.5}L^{0.5}K^{0.5} = t f(L, K).$$

$\alpha + \beta = 1$: **rendimenti costanti di scala**.

(c) $\partial MPL / \partial L = -0.25 L^{-1.5} K^{0.5} < 0$ per ogni $L, K > 0$: il MPL è strettamente decrescente in L (con K fisso). ✓

Esercizio 5.2. $Q = 10L - L^2$ (breve periodo).

(a)

$$MPL = \frac{dQ}{dL} = 10 - 2L, \quad APL = \frac{Q}{L} = 10 - L.$$

(b) $MPL = APL \Rightarrow 10 - 2L = 10 - L \Rightarrow L = 0$. Per questa funzione APL è strettamente decrescente per ogni $L > 0$ (poiché $MPL = 10 - 2L < 10 - L = APL$ per $L > 0$). La formula $\frac{d(APL)}{dL} = \frac{MPL - APL}{L}$ è verificabile: ad es. a $L = 3$: $\frac{(10-6)-(10-3)}{3} = \frac{4-7}{3} = -1 = \frac{d(10-L)}{dL}$. ✓

(c) $MPL = 0 \Rightarrow 10 - 2L = 0 \Rightarrow L^{TP} = 5$.

Esercizio 5.3. $Q = L^{0.7}K^{0.4}$.

$$\alpha + \beta = 0.7 + 0.4 = 1.1 > 1 \Rightarrow \text{rendimenti crescenti di scala.}$$

$$MPL = 0.7 L^{-0.3} K^{0.4}, \quad MPK = 0.4 L^{0.7} K^{-0.6}.$$

Esercizio 5.4. $f(2L, 2K) = 180$ vs $2f(L, K) = 200$. Poiché $180 < 200$: **rendimenti decrescenti di scala**. Possibile spiegazione: raddoppiare tutti gli input genera problemi di coordinamento, burocrazia, congestione delle strutture, che impediscono di raddoppiare l'output.

Capitolo 6 – Isoquanti, MRTS e Tipi di Tecnologia

Esercizio 6.1. $Q = L^{0.6}K^{0.4}$, punto $(L, K) = (16, 9)$.

$$MPL = 0.6 L^{-0.4} K^{0.4}, \quad MPK = 0.4 L^{0.6} K^{-0.6}.$$

$$MRTS_{LK} = \frac{MPL}{MPK} = \frac{0.6}{0.4} \cdot \frac{K}{L} = \frac{3}{2} \cdot \frac{K}{L}.$$

Nel punto $(16, 9)$:

$$MRTS_{LK} = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{32} \approx 0.844.$$

Interpretazione: in quel punto, aumentando L di 1 unità si può ridurre K di circa 0.844 unità mantenendo l'output \bar{Q} costante.

Esercizio 6.2. Supponiamo che due isoquanti Q_1 e $Q_2 > Q_1$ si intersechino nel punto P . Il punto P appartiene a entrambi gli isoquanti, quindi $f(P) = Q_1$ e $f(P) = Q_2$ simultaneamente, il che è impossibile poiché la funzione di produzione assegna a ogni input un unico livello di output. Contraddizione: due isoquanti non possono intersecarsi.

Esercizio 6.3.

- $Q = 3L + 5K$: isoquanti **lineari** ($MRTS = 3/5$ costante). I fattori sono **sostituti perfetti**: si può passare da tutto K a tutto L con lo stesso output.
- $Q = \min\{2L, K\}$: isoquanti **a L** con vertice sulla retta $K = 2L$. I fattori sono **complementi perfetti**: servono in proporzione fissa $K/L = 2$.
- $Q = L^{0.5}K^{0.5}$: isoquanti **convessi** verso l'origine, intermedi. I fattori sono sostituibili ma non perfettamente.

Esercizio 6.4. $Q = L^{0.5}K^{0.5}$, $(L, K) = (4, 9)$.

$$MRTS_{LK} = \frac{MPL}{MPK} = \frac{0.5 K^{0.5}/L^{0.5}}{0.5 L^{0.5}/K^{0.5}} = \frac{K}{L} = \frac{9}{4} = 2.25.$$

Interpretazione: in quel punto, l'impresa è disposta a ridurre K di 2.25 unità per ogni unità aggiuntiva di L , mantenendo invariato l'output. Il MRTS è alto perché nel punto $(4, 9)$ il capitale è abbondante rispetto al lavoro, quindi MPK è basso e MPL è alto.

Capitolo 7 – Costi di Produzione e Curve di Costo

Esercizio 7.1. $TC(Q) = 200 + 5Q + Q^2$.

(a) $FC = 200$; $VC(Q) = 5Q + Q^2$.

$$AFC = \frac{200}{Q}, \quad AVC = 5 + Q, \quad AC = \frac{200}{Q} + 5 + Q, \quad MC = 5 + 2Q.$$

(b) $AVC = 5 + Q$ è **lineare crescente** (non a U in questo caso: i costi variabili partono già crescenti, senza una fase iniziale decrescente).

(c) Minimo di AC :

$$\frac{dAC}{dQ} = -\frac{200}{Q^2} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q^2 = 200 \quad \Rightarrow \quad Q^* = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14.14.$$

Verifica: $MC(Q^*) = 5 + 2\sqrt{200} = 5 + 20\sqrt{2}$; $AC(Q^*) = \frac{200}{\sqrt{200}} + 5 + \sqrt{200} = \sqrt{200} + 5 + \sqrt{200} = 5 + 20\sqrt{2}$.
✓

Esercizio 7.2. $TC(Q) = F + cQ^2$, quindi $AC = F/Q + cQ$.

(a)

$$\frac{dAC}{dQ} = -\frac{F}{Q^2} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad Q^2 = \frac{F}{c} \quad \Rightarrow \quad Q^* = \sqrt{\frac{F}{c}}.$$

(b) $F \uparrow \Rightarrow Q^* \uparrow$: costi fissi più alti rendono ottimale produrre di più per spalmarli su più unità. $c \uparrow \Rightarrow Q^* \downarrow$: costi variabili più alti rendono costoso espandere la produzione, per cui conviene fermarsi prima.

Esercizio 7.3 (Vero o Falso).

- a) **Vero.** Se $MC < AC$, il costo dell'unità marginale è sotto la media: produrre un'unità in più abbassa la media. Formalmente: $\frac{d(AC)}{dQ} = \frac{MC-AC}{Q} < 0$.
- b) **Falso.** MC interseca AC nel *minimo* di AC , non nel massimo. È il punto in cui $\frac{d(AC)}{dQ} = 0$, cioè $MC = AC$.
- c) **Vero.** $MC = dTC/dQ = dVC/dQ$: i costi fissi non variano al margine, quindi non influenzano MC .
- d) **Vero.** La stessa logica si applica identicamente ad AVC : $\frac{d(AVC)}{dQ} = \frac{MC-AVC}{Q}$, che è negativo se e solo se $MC < AVC$.

Esercizio 7.4.

- a) **Microchip: LAC fortemente decrescente.** I costi di progettazione e di fab sono enormi (alto F) ma fissi; il costo marginale di produrre un chip in più è quasi nullo. Economie di scala dominanti (TSMC, Intel).
- b) **Consulenza individuale: LAC crescente** o rapidamente costante. Il professionista è il fattore limitante; scalare significa assumere e coordinare altri, con crescenti costi di supervisione e rischio sulla qualità del servizio.
- c) **GDO: LAC inizialmente decrescente** (centralizzazione acquisti, logistica, IT), poi tende a stabilizzarsi o a crescere quando la catena diventa troppo grande da gestire efficientemente.

Capitolo 8 – Minimizzazione dei Costi e Scelta Ottimale dei Fattori

Esercizio 8.1. $w = 12$, $r = 24$, $C = 240$.

(a) $240 = 12L + 24K \Rightarrow K = 10 - \frac{1}{2}L$.

(b) Intercetta su K : $K = 10$ (quando $L = 0$). Intercetta su L : $L = 20$ (quando $K = 0$). Pendenza: $-w/r = -12/24 = -1/2$.

(c) Con $w' = 18$ (a parità di $r = 24$ e $C = 240$): $K = 10 - \frac{18}{24}L = 10 - \frac{3}{4}L$. L'intercetta su L scende a $240/18 \approx 13.3$; quella su K rimane 10. La retta *ruota verso il basso* sull'asse L : diventa più ripida (pendenza $-3/4$), riflettendo il maggior costo relativo del lavoro.

Esercizio 8.2. $MPL = 8$, $MPK = 4$, $w = 16$, $r = 24$.

(a)

$$MRTS = \frac{MPL}{MPK} = \frac{8}{4} = 2, \quad \frac{w}{r} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

Poiché $MRTS = 2 \neq 2/3 = w/r$: **non siamo all'ottimo.**

(b) Verifica equivalente:

$$\frac{MPL}{w} = \frac{8}{16} = 0.5 > \frac{MPK}{r} = \frac{4}{24} \approx 0.167.$$

Un euro speso in L produce 0.5 unità in più; un euro in K solo 0.167. Conviene **aumentare L e ridurre K .**

(c) Spostandosi verso più L e meno K : per rendimenti decrescenti, MPL scende; con meno K disponibile, MPK sale. Il processo continua finché $MPL/w = MPK/r$.

Esercizio 8.3. $Q = 2L^{0.5}K^{0.5}$, $w = 8$, $r = 2$, $\bar{Q} = 40$.

(a) $MRTS_{LK} = K/L$ (la costante 2 si cancella). Condizione di ottimo:

$$\frac{K}{L} = \frac{w}{r} = \frac{8}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad K = 4L.$$

(b) Vincolo output ($\alpha + \beta = 1$):

$$40 = 2L^{0.5}(4L)^{0.5} = 2 \cdot 2 \cdot L = 4L \quad \Rightarrow \quad L^* = 10, \quad K^* = 40.$$

(c) $C^* = 8 \cdot 10 + 2 \cdot 40 = 80 + 80 = 160$.

(d) $K^* = 40 \gg L^* = 10$: il mix è **capital-intensive**. Motivazione: $r = 2 \ll w = 8$, il capitale costa molto meno del lavoro, quindi l'impresa lo usa in misura molto maggiore.

Esercizio 8.4. Partendo dall'Esercizio 8.3 ($w = 8, r = 2, Q = 40$), ora $w' = 2$.

(a) Nuovo rapporto ottimo: $K/L = w'/r = 2/2 = 1 \Rightarrow K = L$.

$$40 = 2L^{0.5}L^{0.5} = 2L \quad \Rightarrow \quad L^{**} = 20, \quad K^{**} = 20.$$

(b) $C^{**} = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 20 = 80$. $C^{**} = 80 < C^* = 160$: il costo si dimezza. Con w molto più basso, lo stesso output ora costa molto meno perché il fattore diventato più economico (il lavoro) viene usato molto di più.

(c) Con $w = w' = r = 2$ i fattori hanno lo stesso prezzo: il mix ottimo è $K = L$ (simmetrico), l'impresa non preferisce nessuno dei due. Paesi con bassi salari (alto L , basso w) tendono ad attrarre produzioni labour-intensive; con salari alti si investe in automazione per compensare.

Esercizio 8.5. w passa da 10 a 14; $r = 20$; $Q = L^{0.7}K^{0.3}$.

$$\frac{K}{L} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{w}{r} = \frac{0.3}{0.7} \cdot \frac{w}{r}.$$

$$\left. \frac{K}{L} \right|_{w=10} = \frac{3}{7} \cdot \frac{10}{20} \approx 0.214, \quad \left. \frac{K}{L} \right|_{w=14} = \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{20} = 0.300.$$

(a) Il rapporto K/L aumenta da 0.214 a 0.300: l'impresa tende a sostituire lavoro con capitale.

(b) Chi si adatta facilmente: imprese con tecnologia flessibile e accesso al credito per investire in automazione; settori in cui L e K sono buoni sostituti. Chi soffre: PMI con impianti fissi; settori fortemente labour-intensive con poca sostituibilità (es. assistenza alla persona, artigianato specializzato).

(c) Il costo minimo C^* **aumenta**: pagare di più un fattore significa pagare di più per produrre lo stesso output. Tuttavia l'aumento è *attenuato* rispetto a un'impresa che non potesse sostituire i fattori: la possibilità di usare più K al posto di L limita l'impatto sul costo totale.

Sezione “Domande ed esercizi” – Teoria del Consumatore

Domande a risposta multipla

1. Risposta C. Il costo opportunità è il valore della migliore alternativa sacrificata. A non è corretta (il costo opportunità può differire dalla spesa monetaria, es. il lavoro rinunciato per frequentare l'università). B è errata (un sunk cost è irrecuperabile e non deve influenzare decisioni future). D è errata (l'analisi marginale si applica a variazioni continue, non solo a scelte binarie).

2. Risposta B. La condizione $f'(x^*) = 0$ è necessaria (CPO); per avere un massimo *locale* serve la CSO $f''(x^*) < 0$. A è errata ($f'' > 0$ indica un minimo). C e D non soddisfano la CPO.

3. Risposta B. La transitività afferma: se $A \succeq B$ e $B \succeq C$, allora $A \succeq C$. A descrive la completezza. C confonde preferenza debole con preferenza stretta. D è il teorema di rappresentazione, che richiede anche altri assiomi.

4. Risposta C. Sotto monotonicità, le curve di indifferenza hanno pendenza negativa: aumentare x richiede diminuire y per restare sulla stessa curva. A è errata (l'intersezione viola la transitività). B è

errata (pendenza negativa, non positiva). D è errata (le rette corrispondono ai sostituti perfetti, caso speciale).

5. Risposta B. All'ottimo interno vale $MU_x/p_x = MU_y/p_y$, ossia l'utilità marginale per euro è uguale per entrambi i beni. A inverte il rapporto dei prezzi. C è falsa in generale ($MU_x = MU_y$ vale solo se $p_x = p_y$). D descrive le soluzioni d'angolo, non l'ottimo interno.

Esercizi e domande aperte

Esercizio 1.

(a) $V(x, y) = 2xy + 10 = 2U(x, y) + 10$. La funzione $f(u) = 2u + 10$ ha $f' = 2 > 0$: è una trasformazione monotona crescente di U . Quindi U e V rappresentano le **stesse preferenze**: $U(A) \geq U(B) \iff V(A) \geq V(B)$ per ogni coppia di panieri.

(b) Le quattro proprietà delle curve di indifferenza sotto monotonicità e convessità:

- 1. Pendenza negativa:** cedere un'unità di x richiede ricevere y per compensare, altrimenti si starebbe peggio (monotonicità).
- 2. Non si intersecano:** se si intersecassero, per transitività si avrebbe $U(A) = U(B)$ e $U(A) = U(C)$ ma $U(B) \neq U(C)$, contraddizione.
- 3. Convessità verso l'origine:** le miscele sono preferite agli estremi (convessità delle preferenze); il MRS è decrescente.
- 4. Curve più alte a nord-est:** un paniere con più di entrambi i beni è strettamente preferito (monotonicità).

(c) Per $U(x, y) = xy$:

$$MU_x = y, \quad MU_y = x \quad \Rightarrow \quad MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{y}{x}.$$

Interpretazione: se $MRS = 3$ in un dato punto, il consumatore è disposto a rinunciare a 3 unità di y per ottenere 1 unità in più di x mantenendo invariata l'utilità.

Esercizio 2. $U(x, y) = x^{0.5}y^{0.5}$, $p_x = 10$, $p_y = 5$, $M = 100$.

(a) *Sostituzione.* Dal vincolo: $y = (100 - 10x)/5 = 20 - 2x$. Si massimizza $\tilde{U}(x) = x^{0.5}(20 - 2x)^{0.5}$, equivalentemente $g(x) = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$:

$$g'(x) = 20 - 4x = 0 \Rightarrow x^* = 5, \quad y^* = 20 - 10 = 10.$$

(b) *Lagrange.* $\mathcal{L} = x^{0.5}y^{0.5} - \lambda(10x + 5y - 100)$. CPO: $0.5x^{-0.5}y^{0.5} = 10\lambda$ e $0.5x^{0.5}y^{-0.5} = 5\lambda$. Dividendo: $y/x = 2 \Rightarrow y = 2x$. Nel vincolo: $10x + 10x = 100 \Rightarrow x^* = 5$, $y^* = 10$. $\lambda = \frac{0.5\sqrt{10/5}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{20} \approx 0.0707$: ogni euro di reddito aggiuntivo aumenta l'utilità ottima di circa 0.0707.

(c) $MRS(5, 10) = y/x = 10/5 = 2$; $p_x/p_y = 10/5 = 2$. $MRS = p_x/p_y$. ✓

Esercizio 3.

(a) La **PCC** è il luogo dei panieri ottimi nello spazio (x, y) al variare di p_x (con p_y e M fissi): è una curva nello spazio dei beni. La **curva di domanda** proietta questi punti ottimi sul piano (x, p_x) : mostra la quantità domandata di x per ogni valore di p_x . La curva di domanda si *deriva* dalla PCC.

(b) La **ICC** è il luogo dei panieri ottimi nello spazio (x, y) al variare di M (con p_x e p_y fissi). La **curva di Engel** proietta questi punti sul piano (x, M) : mostra la quantità domandata di x per ogni livello di reddito (a prezzi fissi).

(c) Se al crescere di M la quantità ottima di x diminuisce lungo la ICC, allora $\partial x^D / \partial M < 0$: x è un **bene inferiore**.

(d) Se la curva di Engel è concava in x rispetto a M , la quantità domandata cresce a ritmo decrescente all'aumentare del reddito. Questo suggerisce che l'elasticità reddito $\varepsilon_M = (\partial x^D / \partial M) \cdot (M/x^D)$ è positiva ma tende a *diminuire* al crescere di M : il bene è normale ma diventa via via meno "reattivo" al reddito, comportamento tipico dei **beni necessari**.

Sezione "Domande ed esercizi" – Teoria del Produttore

Domande a risposta multipla

1. Risposta B. La funzione di produzione indica la quantità *massima* di output ottenibile da ogni combinazione di input. A descrive la funzione di costo. C è errata: nel breve periodo almeno un fattore è fisso. D non ha fondamento.

2. Risposta C. Per $Q = AL^\alpha K^\beta$: $f(tL, tK) = t^{\alpha+\beta} f(L, K)$. I rendimenti sono crescenti se e solo se $\alpha + \beta > 1$. A è errata (conta la somma, non il confronto tra i singoli esponenti). B descrive i rendimenti costanti. D non ha relazione con la definizione.

3. Risposta C. APL è massimo quando $MPL = APL$, poiché $\frac{d(APL)}{dL} = \frac{MPL - APL}{L} = 0$ implica $MPL = APL$. A è errata ($MPL = 0$ è il massimo del TP). B è condizione per cui APL è ancora *crescente*, non massimo. D non ha senso economico.

4. Risposta C. AC è minimo dove $\frac{d(AC)}{dQ} = \frac{MC - AC}{Q} = 0$, cioè dove $MC = AC$. A è errata ($AFC = AVC$ non ha implicazioni sul minimo di AC). B è errata. D è la condizione per il minimo di MC , non di AC .

5. Risposta D. Uno shock sui costi fissi aumenta FC , e quindi AFC e AC , ma non modifica $VC(Q)$, e di conseguenza né AVC né MC cambiano. A, B e C sono tutte errate perché quelle curve variano con uno shock su FC .

Esercizi e domande aperte

Esercizio 1. $Q = L^{0.5} K^{0.5}$.

(a)

$$MPL = 0.5 L^{-0.5} K^{0.5}, \quad MPK = 0.5 L^{0.5} K^{-0.5}.$$

Decrescenza: $\partial MPL / \partial L = -0.25 L^{-1.5} K^{0.5} < 0$; $\partial MPK / \partial K = -0.25 L^{0.5} K^{-1.5} < 0$. ✓

(b) $f(tL, tK) = (tL)^{0.5} (tK)^{0.5} = t \cdot L^{0.5} K^{0.5} = t f(L, K)$. $\alpha + \beta = 1$: **rendimenti costanti di scala**.

(c) $MRTS_{LK} = MPL/MPK = K/L$. Nel punto (4, 9): $MRTS = 9/4 = 2.25$. L'impresa può ridurre K di 2.25 unità per ogni unità aggiuntiva di L senza variare \bar{Q} . Il MRTS è alto perché nel punto considerato K è abbondante rispetto a L ($K = 9 > L = 4$), quindi MPL è relativamente alto e MPK basso.

(d) Lungo un isoquanto convesso, man mano che si usa più L (e meno K): MPL diminuisce per rendimenti marginali decrescenti di L , mentre MPK aumenta perché si dispone di meno K . Poiché $MRTS = MPL/MPK$, il numeratore scende e il denominatore sale: $MRTS$ è strettamente decrescente.

Esercizio 2. $TC(Q) = 200 + 4Q + Q^2$.

(a) $FC = 200$; $VC(Q) = 4Q + Q^2$.

$$AFC = \frac{200}{Q}, \quad AVC = 4 + Q, \quad AC = \frac{200}{Q} + 4 + Q, \quad MC = 4 + 2Q.$$

(b) $\frac{dAC}{dQ} = -200/Q^2 + 1 = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14.14$. Verifica: $MC(Q^*) = 4 + 20\sqrt{2}$; $AC(Q^*) = \frac{200}{\sqrt{200}} + 4 + \sqrt{200} = \sqrt{200} + 4 + \sqrt{200} = 4 + 20\sqrt{2}$. ✓

(c) $VC' = 1.5(4Q + Q^2) = 6Q + 1.5Q^2$, quindi:

$$MC' = 6 + 3Q, \quad AVC' = 6 + 1.5Q.$$

Nuovo minimo: $dAC'/dQ = -200/Q^2 + 1.5 = 0 \Rightarrow Q^{**} = \sqrt{200/1.5} = 20/\sqrt{3} \approx 11.55$. $Q^{**} < Q^*$: con costi variabili più alti conviene produrre di meno per minimizzare il costo medio.

(d) $MC = dTC/dQ = dVC/dQ$: i costi fissi sono costanti, la loro derivata rispetto a Q è zero. Nel breve periodo, l'impresa non può recuperare i FC già sostenuti (sono sunk): le decisioni sul quanto produrre dipendono solo da MC e dal ricavo marginale, non dall'entità dei costi fissi.

Esercizio 3.

(a) **Curva di indifferenza vs isoquanto.** Entrambi descrivono un insieme di livello di una funzione: la curva di indifferenza è l'insieme $\{(x, y) : U(x, y) = \bar{U}\}$, l'isoquanto è $\{(L, K) : f(L, K) = \bar{Q}\}$. Le proprietà geometriche sono identiche (pendenza negativa, non intersezione, convessità). La differenza sostanziale è nell'oggetto: utilità (soggettiva, ordinale) vs output (fisico, misurabile).

(b) **Vincolo di bilancio vs isocosto.** Il vincolo di bilancio $p_x x + p_y y = M$ definisce le combinazioni di beni accessibili dato M . L'isocosto $wL + rK = C$ definisce le combinazioni di input che costano esattamente C . Stessa struttura matematica: retta con intercette $M/p_x, M/p_y$ (o $C/w, C/r$) e pendenza $-p_x/p_y$ (o $-w/r$). La differenza: nel bilancio M è dato e si sceglie il paniere ottimale; nell'isocosto C è la variabile da minimizzare e l'isoquanto è il vincolo.

(c) **Condizione di ottimo.** In entrambi i casi all'ottimo le pendenze dell'oggetto di scelta e del vincolo coincidono: $MRS = p_x/p_y$ per il consumatore, $MRTS = w/r$ per il produttore. L'interpretazione è analoga: il trade-off soggettivo (preferenze o tecnologia) deve eguagliare il trade-off di mercato (prezzi dei beni o dei fattori). Equivalentemente, l'utilità/prodotto marginale per euro speso deve essere uguale per entrambi i beni/fattori.

Il ruolo di M vs \bar{Q} . Nel problema del consumatore, M fissa la dimensione dell'insieme di bilancio: si sceglie la curva di indifferenza più alta raggiungibile dato quel bilancio (problema di *massimo*). Nel problema del produttore di lungo periodo, \bar{Q} fissa l'isoquanto su cui lavorare: si cerca l'isocosto più basso che lo raggiunge (problema di *minimo*). Geometricamente, nel primo caso ci si sposta verso isoquante/curve di indifferenza più alte finché non si tocca il vincolo; nel secondo ci si sposta verso isocosti più bassi finché non si tocca il vincolo (l'isoquanto). La "direzione di ottimizzazione" è opposta.