

# Microeconomia

## Lezione 10: Ripasso Generale

Marco Rosso

Università di Bologna

A.A. 2025–2026

19 marzo 2026

# Preferenze e MRS

## Utilità marginale

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad MU_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

## Saggio marginale di sostituzione

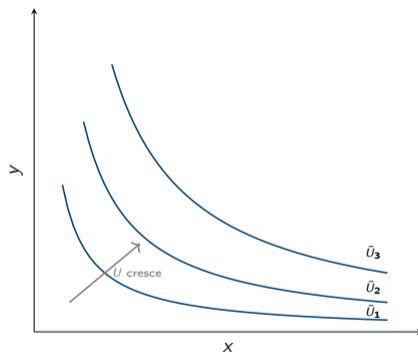
$$MRS_{xy} = - \frac{dy}{dx} \Big|_{\bar{U}} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

*MRS decrescente* lungo la curva  $\Leftrightarrow$  preferenze  
convesse.

## Tre tipi di preferenze

Cobb-Douglas	$U = x^\alpha y^\beta$
Sostituti perfetti	$U = ax + by$
Complementi perfetti	$U = \min\{ax, by\}$

Mappa di indifferenza



# Vincolo di bilancio e scelta ottima

## Vincolo di bilancio

$$p_x x + p_y y = M$$

Pendenza =  $-p_x/p_y$  (trade-off di mercato).

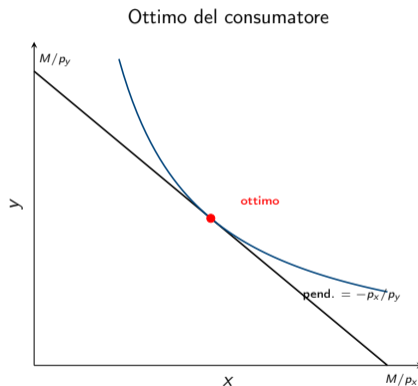
## Condizione di ottimo (interno)

$$MRS = \frac{p_x}{p_y}$$

Equivalentemente:  $\frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y}$

## Soluzione Cobb-Douglas $U = x^\alpha y^\beta$

$$x^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{M}{p_x}, \quad y^* = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{M}{p_y}$$



# Lagrangiana del consumatore

## Problema

$$\max_{x,y} U(x,y) \quad \text{s.v.} \quad p_x x + p_y y = M$$

## Lagrangiana e condizioni del primo ordine

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= U(x,y) - \lambda(p_x x + p_y y - M) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= MU_x - \lambda p_x = 0 \Rightarrow MU_x = \lambda p_x \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= MU_y - \lambda p_y = 0 \Rightarrow MU_y = \lambda p_y \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -(p_x x + p_y y - M) = 0\end{aligned}$$

## Interpretazione di $\lambda$

$\lambda = MU_x/p_x = MU_y/p_y$  è l'**utilità marginale del reddito**: quanto aumenta  $U$  per ogni euro aggiuntivo di budget.

# Domanda e statica comparata

## Curva di domanda individuale

Relazione  $x^D = x^D(p_x; p_y, M)$  ottenuta variando  $p_x$  e risolvendo il problema dell'ottimo.

## Curva reddito-consumo (ICC) & Engel

Variare  $M$  con  $p_x, p_y$  fissi  $\rightarrow$  ICC.  
Proiezione su  $(M, x) \rightarrow$  curva di Engel.

## Equazione di Slutsky

$$\underbrace{\frac{\partial x^D}{\partial p_x}}_{\text{effetto totale}} = \underbrace{\frac{\partial x^c}{\partial p_x}}_{\leq 0 \text{ (sostituzione)}} - \underbrace{x^D \frac{\partial x^D}{\partial M}}_{\text{effetto reddito}}$$

## Classificazione beni

Tipo	Caratteristica
Normale	$\partial x^D / \partial M > 0$
Inferiore	$\partial x^D / \partial M < 0$
Giffen	eff. reddito $>$ sostituzione
Sostituti	$\partial x^D / \partial p_y > 0$
Complementi	$\partial x^D / \partial p_y < 0$

# Elasticità della domanda

## Tre elasticità fondamentali

$$\varepsilon_P = \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q} \quad \varepsilon_M = \frac{\partial Q}{\partial M} \cdot \frac{M}{Q} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial Q_x}{\partial P_y} \cdot \frac{P_y}{Q_x}$$

### Classificazione $\varepsilon_P$

$ \varepsilon_P  > 1$	elastica
$ \varepsilon_P  < 1$	anelastica
$ \varepsilon_P  = 1$	unitaria

### Classificazione $\varepsilon_M$

$\varepsilon_M < 0$	bene inferiore
$0 < \varepsilon_M < 1$	necessario
$\varepsilon_M \approx 1$	normale
$\varepsilon_M > 1$	lusso

### Elasticità e ricavi totali

$$RT = P \cdot Q$$

Se  $|\varepsilon_P| > 1$ :  $P \uparrow \Rightarrow RT \downarrow$

Se  $|\varepsilon_P| < 1$ :  $P \uparrow \Rightarrow RT \uparrow$

$RT$  massimo quando  $|\varepsilon_P| = 1$

### Classificazione $\varepsilon_{xy}$

$\varepsilon_{xy} > 0$	sostituti
$\varepsilon_{xy} < 0$	complementi
$\varepsilon_{xy} = 0$	indipendenti

# Funzione di produzione e prodotti marginali

## Funzione di produzione

$$Q = f(L, K)$$

## Prodotto marginale e medio

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}, \quad MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$$

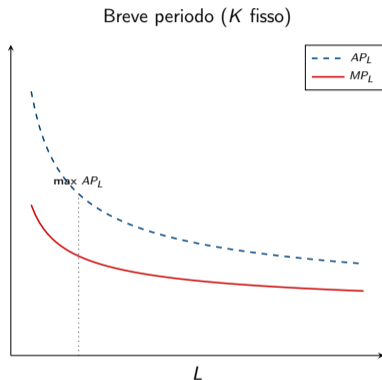
$$AP_L = \frac{Q}{L}, \quad AP_K = \frac{Q}{K}$$

## Cobb-Douglas $Q = AL^\alpha K^\beta$

$$MP_L = \alpha AL^{\alpha-1} K^\beta, \quad MP_K = \beta AL^\alpha K^{\beta-1}$$

## Regola MP-AP

$MP_L > AP_L \Rightarrow AP_L$  cresce.  $MP_L < AP_L \Rightarrow AP_L$  decresce.  $MP_L = AP_L \Rightarrow AP_L$  al massimo.



# Rendimenti di scala

## Definizione formale

Moltiplicare tutti gli input per  $t > 1$ :

$$f(tL, tK) \begin{cases} > t f(L, K) & \text{rendimenti crescenti (IRS)} \\ = t f(L, K) & \text{rendimenti costanti (CRS)} \\ < t f(L, K) & \text{rendimenti decrescenti (DRS)} \end{cases}$$

## Cobb-Douglas: test immediato

$Q = AL^\alpha K^\beta$ : sostituire  $tL, tK$  dà  $t^{\alpha+\beta} Q$ .

$$\alpha + \beta > 1 \Rightarrow \text{IRS} \quad \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \text{CRS} \quad \alpha + \beta < 1 \Rightarrow \text{DRS}$$

## Collegamento con i costi

IRS  $\Leftrightarrow$  economie di scala (AC decrescente nel lungo periodo).

DRS  $\Leftrightarrow$  diseconomie di scala (AC crescente nel lungo periodo).

# Isoquanti e MRTS

## Isoquanto

Luogo dei punti  $(L, K)$  che producono lo stesso output  $\bar{Q}$ :

$$\{(L, K) : f(L, K) = \bar{Q}\}$$

## MRTS

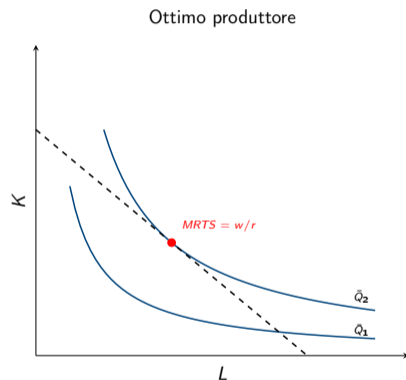
$$MRTS_{LK} = - \left. \frac{dK}{dL} \right|_{\bar{Q}} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

Quanto  $K$  puoi ridurre aumentando  $L$  di 1, tenendo  $Q$  costante.

## Isocosto

$$wL + rK = C \quad \Rightarrow \quad K = \frac{C}{r} - \frac{w}{r}L$$

Pendenza =  $-w/r$



# Minimizzazione dei costi: condizione e Lagrangiana

## Problema

$$\min_{L,K} wL + rK \quad \text{s.v.} \quad f(L, K) = \bar{Q}$$

## Condizione di ottimo

$$\boxed{MRTS_{LK} = \frac{w}{r}} \Leftrightarrow \frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}$$

L'ultimo euro speso su ogni input produce la stessa quantità aggiuntiva di output.

## Lagrangiana

$$\mathcal{L} = wL + rK - \lambda(f(L, K) - \bar{Q})$$

CPO:

$$w = \lambda MP_L, \quad r = \lambda MP_K$$

$\lambda = w/MP_L = r/MP_K$ : costo marginale di produrre un'unità aggiuntiva.

## Cobb-Douglas: domande di input ottime

Con  $Q = L^\alpha K^\beta$ ,  $w, r$  dati:

$$L^* = \left( \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{r}{w} \right)^{\beta/(\alpha+\beta)} Q^{1/(\alpha+\beta)}, \quad K^* = \left( \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{w}{r} \right)^{\alpha/(\alpha+\beta)} Q^{1/(\alpha+\beta)}$$

# Struttura dei costi nel breve periodo

## Definizioni fondamentali

$$TC(Q) = FC + VC(Q)$$

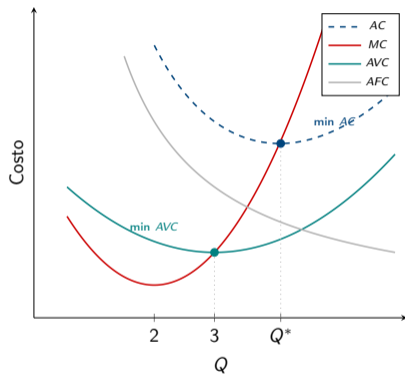
$$AC(Q) = \frac{TC}{Q} = AFC + AVC$$

$$AFC(Q) = \frac{FC}{Q} \quad (\text{sempre decrescente})$$

$$AVC(Q) = \frac{VC(Q)}{Q}$$

$$MC(Q) = \frac{dTC}{dQ} = \frac{dVC}{dQ}$$

Curve di costo BP ( $TC = \frac{1}{3}Q^3 - 2Q^2 + 5Q + 12$ )



## Relazione MC-AC

$MC < AC \Rightarrow AC$  decresce.  $MC > AC \Rightarrow AC$  cresce.  $MC = AC \Rightarrow AC$  al minimo.

La stessa regola vale per  $MC$  e  $AVC$ .

# Scala minima efficiente e shock sui costi

## Scala minima efficiente (SME)

Il livello di output  $Q^*$  che minimizza  $AC(Q)$ :

$$\frac{dAC}{dQ} = 0 \Leftrightarrow MC(Q^*) = AC(Q^*)$$

Esempio:  $TC = F + cQ^2 \Rightarrow Q^* = \sqrt{F/c}$

## Effetto di shock

$F \uparrow$   $AC \uparrow$ ,  $MC$  invariato,  $Q^* \uparrow$   
 $c \uparrow$   $AC \uparrow$ ,  $MC \uparrow$ ,  $Q^* \downarrow$

## Regola pratica

Un aumento dei **costi fissi** sposta  $AC$  verso l'alto senza toccare  $MC$ : la curva di offerta dell'impresa non cambia nel breve periodo.

Un aumento dei **costi variabili** sposta sia  $AC$  che  $MC$  verso l'alto.

## Costi irrecuperabili (sunk costs)

Non influenzano le decisioni future: sono già sostenuti e non recuperabili, indipendentemente dalla scelta corrente.

# Costi nel lungo periodo

## Tutti gli input sono variabili

Nel lungo periodo l'impresa sceglie anche  $K$ , risolvendo il problema di minimizzazione dei costi per ogni livello di  $Q$ .

## Curva $LAC$ : inviluppo delle curve BP

$$LAC(Q) = \min_K AC_{BP}(Q; K)$$

La  $LAC$  è l'**inviluppo inferiore** di tutte le curve  $AC$  di breve periodo (una per ogni  $K$  fisso).

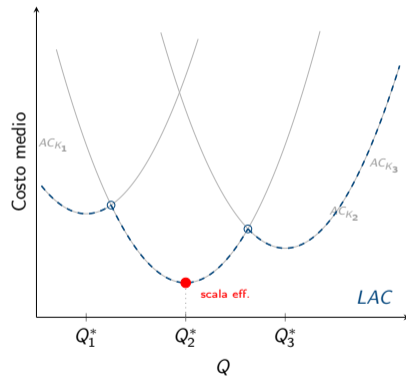
## Economie e diseconomie di scala

$LAC$  decrescente  $\Leftrightarrow$  **economie di scala** (IRS).

$LAC$  crescente  $\Leftrightarrow$  **diseconomie di scala** (DRS).

Minimo di  $LAC$  = scala efficiente di lungo periodo.

$LAC$  = inviluppo inferiore delle  $AC$  di BP



## Formule chiave

Concetto	Formula	Condizione ottimo
Ottimo consumatore	$MRS = MU_x/MU_y$	$MRS = p_x/p_y$
Cobb-Douglas domanda	$x^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{M}{p_x}$	vincolo $p_x x + p_y y = M$
Slutsky	$\frac{\partial x^D}{\partial p_x} = \frac{\partial x^c}{\partial p_x} - x^D \frac{\partial x^D}{\partial M}$	effetto sost. $\leq 0$
Elasticità prezzo	$\varepsilon_P = \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q}$	$RT$ max se $ \varepsilon_P  = 1$
Prodotto marginale	$MP_L = \partial Q/\partial L$	regola $MP-AP$
MRTS	$MP_L/MP_K$	$MRTS = w/r$
Rendimenti di scala	$f(tL, tK)$ vs $t f(L, K)$	$\alpha + \beta$ per C-D
Costo marginale	$MC = dTC/dQ$	$MC = AC$ al min $AC$
Scala minima efficiente	$TC = F + cQ^2$	$Q^* = \sqrt{F/c}$
Min costi LP	$MRTS = w/r$	$LAC =$ involucro

# Grafici da saper disegnare

## Teoria del consumatore

- Curva di indifferenza (Cobb-D., sostituti, complementi)
- Retta di bilancio e ottimo (tangenza)
- Curva prezzo-consumo (PCC) e domanda
- Curva reddito-consumo (ICC) e Engel
- Scomposizione effetto Slutsky

## Elasticità

- Curva di domanda e classificazione elasticità
- $RT$  vs  $|\varepsilon_P|$  (forma a campana)

## Tecnologia

- Curva  $TP$ ,  $AP_L$ ,  $MP_L$  (breve periodo)
- Isoquanti (C-D, sostituti, complementi)
- Isoquanto + isocosto  $\rightarrow$  ottimo produttore

## Costi

- Curve  $TC$ ,  $FC$ ,  $VC$
- Curve  $AC$ ,  $AVC$ ,  $AFC$ ,  $MC$  (a U)
- Spostamenti da shock su  $F$  e  $c$
- $LAC$  come inviluppo delle curve BP

## Esercizio 1

Un consumatore ha preferenze rappresentate da

$$U(x, y) = \sqrt{x} + y$$

con prezzi  $p_x = 2$ ,  $p_y = 1$  e reddito  $M = 10$ .

- (a) Scrivete la Lagrangiana e ricavate le condizioni del primo ordine.
- (b) Trovate il paniere ottimo  $(x^*, y^*)$ . *Attenzione alla soluzione d'angolo.*
- (c) Calcolate il *MRS* nell'ottimo e verificate la condizione di tangenza.
- (d) Il reddito sale a  $M' = 15$ . Come cambia la domanda di  $x$ ? E quella di  $y$ ? Che tipo di beni sono  $x$  e  $y$ ?
- (e) Supponete ora  $M'' = 0,05$ . Trovate l'ottimo. La procedura standard (CPO interne) funziona ancora? Perché?

## Soluzione (a)

### (a) Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \sqrt{x} + y - \lambda(2x + y - 10)$$

### Condizioni del primo ordine

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(2x + y - 10) = 0 \Rightarrow 2x + y = 10$$

### Nota

$\lambda = 1$  dalla CPO su  $y$ : l'utilità marginale del reddito è 1, costante in  $y$ . Questo è il tratto distintivo delle preferenze quasi-lineari.

## Soluzione (b)

(b) Ricavo  $x^*$  combinando le due CPO

$$\frac{1}{4\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x^* = \frac{1}{16}}$$

Ricavo  $y^*$  dal vincolo

$$2 \cdot \frac{1}{16} + y^* = 10 \Rightarrow y^* = 10 - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{79}{8} \approx 9,875}$$

Verifica: soluzione interna

$x^* = 1/16 > 0$  e  $y^* = 79/8 > 0$ : la soluzione è interna, non d'angolo. ✓

Il vincolo è saturo:  $2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{79}{8} = \frac{1}{8} + \frac{79}{8} = \frac{80}{8} = 10$ . ✓

Quando si avrebbe soluzione d'angolo?

Se  $M < p_x \cdot x^* = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ , il consumatore spenderebbe tutto in  $x$  e  $y^* = 0$ . Con  $M = 10$  siamo lontani da quel caso.

## Soluzioni (c) e (d)

### (c) Verifica condizione di tangenza

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{1/16}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2 = \frac{p_x}{p_y} \checkmark$$

### (d) Effetto di $M' = 15$

La domanda di  $x$  *non dipende da  $M$* : dalla CPO,  $x^* = \frac{1}{16}$  indipendentemente dal reddito.  
La domanda di  $y$  assorbe tutto il reddito aggiuntivo:

$$y^{*'} = \frac{M' - 2x^*}{1} = 15 - \frac{1}{8} = \frac{119}{8} \approx 14,875$$

### Classificazione

$x$  è un bene **neutro rispetto al reddito** (caso peculiare delle preferenze quasi-lineari:  $\partial x^* / \partial M = 0$ ,  $\varepsilon_M^x = 0$ ).

$y$  è un bene **normale** con  $\varepsilon_M^y = 1$  (assorbe interamente ogni euro aggiuntivo).

## Soluzione (e)

(e) Caso  $M'' = 0,05$

Applichiamo ingenuamente le CPO interne:  $x^* = 1/16 = 0,0625$ . Ma il vincolo richiederebbe

$$y^* = M'' - 2x^* = 0,05 - 2 \times 0,0625 = 0,05 - 0,125 = -0,075 < 0$$

Problema:  $y^* < 0$  non è ammissibile

La soluzione interna richiede che il reddito sia sufficiente a finanziare

$$p_x x^* = 2 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{8} = 0,125 > M'' = 0,05.$$

Con  $M'' < p_x x^{\text{int}} = \frac{1}{8}$ , il consumatore **non può** raggiungere il paniere interno ottimale. La soluzione d'angolo con  $y^* = 0$  è vincolante.

**Ottimo d'angolo:**  $y^* = 0$ , tutto speso in  $x$

$$p_x x^* = M'' \Rightarrow x^* = \frac{M''}{p_x} = \frac{0,05}{2} = \boxed{0,025}$$

## Soluzione (e)

Verifica: il MRS supera il prezzo relativo nell'angolo

$$MRS(0,025, 0) = \frac{1}{2\sqrt{0,025}} = \frac{1}{2 \times 0,158} \approx 3,16 > 2 = \frac{p_x}{p_y}$$

Il consumatore *vorrebbe* ancora più  $x$ , ma il budget è esaurito:  $x$  vale soggettivamente più di quanto costa, ma non c'è reddito residuo. Condizione d'angolo corretta:  $MRS \geq p_x/p_y$  con  $y^* = 0$ .

## Esercizio 2

La domanda **individuale** di un consumatore per il bene  $x$  è

$$x^D(p_x, M) = \frac{M}{4 p_x}$$

Il consumatore ha reddito  $M_0 = 200$  e affronta il prezzo  $p_0 = 5$ .

- (a) Calcolate  $x_0$ , l'elasticità prezzo  $\varepsilon_P$  e l'elasticità reddito  $\varepsilon_M$  nel punto  $(p_0, M_0)$ .
- (b) Classificate il bene e determinate cosa succede ai ricavi totali del venditore se  $p_x$  sale del 10%.
- (c) Usando la Slutsky, scomponete  $\partial x^D / \partial p_x$  in effetto sostituzione ed effetto reddito. Qual è il segno di ciascun effetto?
- (d) Supponete che  $p_x$  scenda da 5 a 4. Calcolate la variazione *esatta* di  $x^D$  e confrontatela con l'approssimazione tramite elasticità.

## Soluzione (a)

### (a) Quantità iniziale

$$x_0 = \frac{200}{4 \times 5} = \frac{200}{20} = \boxed{10}$$

### Elasticità prezzo

$$\frac{\partial x^D}{\partial p_x} = -\frac{M}{4 p_x^2} \Rightarrow \varepsilon_P = -\frac{M}{4 p_x^2} \cdot \frac{p_x}{x^D} = -\frac{M}{4 p_x} \cdot \frac{4 p_x}{M} = \boxed{-1}$$

### Elasticità reddito

$$\frac{\partial x^D}{\partial M} = \frac{1}{4 p_x} \Rightarrow \varepsilon_M = \frac{1}{4 p_x} \cdot \frac{M}{x^D} = \frac{1}{4 p_x} \cdot \frac{M \cdot 4 p_x}{M} = \boxed{1}$$

### Nota

$\varepsilon_P = -1$  e  $\varepsilon_M = 1$  per ogni valore di  $p_x$  e  $M$ : sono costanti. Questo è il tratto distintivo della domanda a elasticità unitaria, tipica della Cobb-Douglas — ma qui ottenuta da una forma ridotta diversa.

## Soluzioni (b) e (c)

### (b) Classificazione e ricavi totali

- $|\varepsilon_P| = 1$ : elasticità **unitaria**. I ricavi totali  $RT = p_x \cdot x^D = M/4$  sono *costanti* al variare di  $p_x$ : un aumento del 10% del prezzo lascia  $RT$  invariato.
- $\varepsilon_M = 1 > 0$ : bene **normale** (non di lusso:  $\varepsilon_M = 1$ , non  $> 1$ ).

### (c) Scomposizione di Slutsky

$$\underbrace{\frac{\partial x^D}{\partial p_x}}_{=-M/(4p_x^2)} = \underbrace{\frac{\partial x^c}{\partial p_x}}_{\leq 0} - \underbrace{x^D \cdot \frac{\partial x^D}{\partial M}}_{\geq 0}$$

Calcolo numerico in  $(p_0, M_0) = (5, 200)$ ,  $x_0 = 10$ :

$$\frac{\partial x^D}{\partial p_x} = -\frac{200}{4 \cdot 25} = -2, \quad x^D \cdot \frac{\partial x^D}{\partial M} = 10 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial x^c}{\partial p_x} = -2 + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{3}{2}} < 0 \checkmark, \quad \text{effetto reddito} = -\frac{1}{2} < 0$$

Entrambi negativi:  $x$  è bene normale (effetto reddito e sostituzione agiscono nella stessa direzione).

## Soluzione (d)

(d) **Variazione esatta:**  $p_x$  scende da 5 a 4

$$x^D(4, 200) = \frac{200}{4 \times 4} = \frac{200}{16} = 12,5$$

$$\Delta x^{\text{esatto}} = 12,5 - 10 = \boxed{+2,5}$$

### Approssimazione tramite elasticità

Variazione percentuale del prezzo:  $\hat{p} = (4 - 5)/5 = -20\%$ .

$$\hat{x} \approx \varepsilon_P \cdot \hat{p} = (-1) \times (-20\%) = +20\%$$

$$\Delta x^{\text{approx}} \approx 10 \times 20\% = \boxed{+2,0}$$

### Confronto

L'approssimazione (+2) sottostima la variazione esatta (+2,5) perché la derivata è valutata nel punto iniziale: man mano che  $p_x$  scende,  $|\partial x^D / \partial p_x|$  cresce (la curva di domanda non è lineare). La discrepanza aumenta con l'entità dello shock.

## Esercizio 3

Un'impresa ha funzione di produzione

$$Q = f(L, K) = L^{1/3}K^{2/3}$$

Nel breve periodo  $K = \bar{K} = 8$  è fisso.

- (a) Scrivete la funzione di produzione di breve periodo  $Q(L; \bar{K} = 8)$  e calcolate  $MP_L$  e  $AP_L$ .
- (b) Dimostrate che  $MP_L < AP_L$  per ogni  $L > 0$ , e interpretate il risultato.
- (c) L'impresa aumenta  $L$  da 8 a 27. Calcolate la variazione discreta di  $Q$  e confrontatela con l'approssimazione tramite  $MP_L$ .
- (d) Verificate i rendimenti di scala della funzione  $Q = L^{1/3}K^{2/3}$  nel lungo periodo.
- (e) Nel breve periodo (con  $K = 8$  fisso) avete dimostrato che  $MP_L$  è decrescente. Questo contraddice i rendimenti di scala costanti del punto (d)? Spiegate la distinzione concettuale.

## Soluzione (a)

(a) Funzione BP con  $K = 8$

$$Q(L) = L^{1/3} \cdot 8^{2/3} = L^{1/3} \cdot 4 = 4L^{1/3}$$

Prodotto marginale del lavoro

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = 4 \cdot \frac{1}{3} L^{-2/3} = \boxed{\frac{4}{3L^{2/3}}}$$

Prodotto medio del lavoro

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{4L^{1/3}}{L} = \boxed{\frac{4}{L^{2/3}}}$$

## Soluzione (b)

### (b) Confronto $MP_L$ vs $AP_L$

$$\frac{MP_L}{AP_L} = \frac{4/(3L^{2/3})}{4/L^{2/3}} = \frac{1}{3} < 1 \quad \forall L > 0$$

Quindi  $MP_L = \frac{1}{3} AP_L < AP_L$  per ogni  $L > 0$ .

### Interpretazione

Il prodotto marginale è costantemente inferiore alla media: ogni lavoratore aggiuntivo contribuisce meno della media già in forza, quindi  $AP_L$  è *sempre* decrescente. Questo riflette i rendimenti marginali decrescenti del lavoro nel breve periodo (con  $K$  fisso).

## Soluzione (c)

### (c) Variazione discreta: $L$ da 8 a 27

$$Q(8) = 4 \cdot 8^{1/3} = 4 \cdot 2 = 8, \quad Q(27) = 4 \cdot 27^{1/3} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\Delta Q = 12 - 8 = 4$$

Approssimazione con  $MP_L$  valutato in  $L = 8$ :

$$MP_L(8) = \frac{4}{3 \cdot 8^{2/3}} = \frac{4}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3}, \quad \Delta Q \approx MP_L(8) \cdot \Delta L = \frac{1}{3} \cdot 19 = 6,3$$

Perché l'approssimazione è lontana?

$\Delta L = 19$  è un cambiamento discreto *molto* grande; la derivata è una buona approssimazione solo per  $\Delta L \rightarrow 0$ . Qui sovrastima:  $MP_L$  decresce lungo il percorso.

## Soluzione (d)

### (d) Test rendimenti di scala

Moltiplichiamo entrambi gli input per  $t > 1$ :

$$\begin{aligned} f(tL, tK) &= (tL)^{1/3}(tK)^{2/3} = t^{1/3} t^{2/3} L^{1/3} K^{2/3} \\ &= t^{1/3+2/3} f(L, K) = t^1 \cdot f(L, K) \end{aligned}$$

### Conclusione

$\alpha + \beta = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ : la tecnologia esibisce **rendimenti di scala costanti** (CRS).

Raddoppiando tutti gli input, l'output esattamente raddoppia.

### Collegamento con i costi

Con CRS, la curva  $LAC$  è piatta: non esistono economie né diseconomie di scala nel lungo periodo. La dimensione ottimale dell'impresa è indeterminata (tecnicamente qualunque scala è efficiente).

## Soluzione (e)

### (e) Rendimenti marginali decrescenti $\neq$ rendimenti di scala decrescenti

Breve periodo: un input è fisso

$MP_L$  decrescente significa: aumentando *solo*  $L$  (con  $K$  fisso), ogni unità aggiuntiva di lavoro contribuisce *meno* all'output.

È una proprietà **unidimensionale**: si muove lungo una traiettoria in cui  $K$  non cambia.

Lungo periodo: tutti gli input variano

I rendimenti di scala descrivono cosa succede aumentando *proporzionalmente* tutti gli input:  $f(tL, tK)$  vs  $t f(L, K)$ .

È una proprietà **radiale**: ci si muove lungo un raggio dal punto di partenza.

### Possono coesistere senza contraddizione

Con  $Q = L^{1/3}K^{2/3}$ :

- $\partial^2 Q / \partial L^2 = -\frac{2}{9}L^{-5/3}K^{2/3} < 0$ :  $MP_L$  **decrescente** in  $L$  (BP,  $K$  fisso) ✓
- $f(tL, tK) = t \cdot f(L, K)$ : rendimenti di scala **costanti** (LP) ✓

Una funzione può avere rendimenti marginali decrescenti in ciascun input e rendimenti di scala costanti o crescenti: sono concetti ortogonali.

## Esercizio 4

Un'impresa produce con tecnologia a complementi perfetti:

$$Q = \min\{L, 2K\}$$

Il salario è  $w = 4$  e il costo del capitale è  $r = 3$ .

- (a) Disegnate (qualitativamente) l'isoquanto per  $\bar{Q} = 4$ . Dove si trova il vertice?
- (b) Trovate le domande di input ottime  $L^*(Q)$  e  $K^*(Q)$  che minimizzano il costo. *Perché il metodo  $MRTS = w/r$  non si applica direttamente qui?*
- (c) Scrivete la funzione di costo totale  $C(Q)$  e calcolate  $MC$  e  $AC$ .
- (d) I prezzi dei fattori cambiano:  $w' = 2$ ,  $r' = 6$ . Come cambiano  $C(Q)$ ,  $MC$  e la scelta ottima degli input?

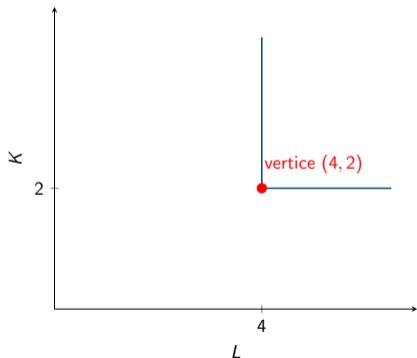
## Soluzione (a)

### (a) Isoquanto per $\bar{Q} = 4$

La tecnologia richiede  $L = \bar{Q}$  e  $2K = \bar{Q}$ , cioè  $L \geq 4$  e  $K \geq 2$ . L'isoquanto è una **curva a L** con vertice in:

$$\bar{Q} = \min\{L, 2K\} = 4 \Rightarrow L = 4, K = 2 \quad (\text{vertice})$$

Isoquanto  $\bar{Q} = 4$



Perché  $MRTS = w/r$  non funziona

Il  $MRTS$  non è definito nel vertice (la funzione non è differenziabile lì). Lungo i tratti orizzontale e verticale il  $MRTS$  è 0 o  $+\infty$ . La condizione di tangenza non può essere applicata.

## Soluzioni (b) e (c)

### (b) Input ottimi

Qualunque unità di  $L$  in eccesso rispetto a  $\bar{Q}$  o di  $K$  in eccesso rispetto a  $\bar{Q}/2$  è sprecata. Il costo è minimizzato esattamente nel vertice:

$$L^*(Q) = Q, \quad K^*(Q) = \frac{Q}{2}$$

### (c) Funzione di costo totale

$$C(Q) = wL^* + rK^* = 4Q + 3 \cdot \frac{Q}{2} = 4Q + \frac{3}{2}Q = \frac{11}{2}Q$$

$$MC = \frac{dC}{dQ} = 5,5 \quad (\text{costante}), \quad AC = \frac{C(Q)}{Q} = 5,5 \quad (\text{costante})$$

### Nota

Con CRS e complementi perfetti,  $MC = AC$  costante per ogni  $Q$ . Non esiste una scala efficiente preferita: qualunque  $Q$  è ugualmente efficiente.

## Soluzione (d)

**(d) Nuovi prezzi:**  $w' = 2$ ,  $r' = 6$

Le domande di input ottime *non cambiano*:  $L^* = Q$  e  $K^* = Q/2$  dipendono solo dalla tecnologia, non dai prezzi (con complementi perfetti la sostituzione è impossibile).

**Nuova funzione di costo**

$$C'(Q) = 2Q + 6 \cdot \frac{Q}{2} = 2Q + 3Q = \boxed{5Q}$$

$$MC' = AC' = \boxed{5} < 5,5$$

### Interpretazione

Il calo di  $w$  (da 4 a 2) riduce il costo del fattore più intensamente usato ( $L^* = Q > K^* = Q/2$ ), abbassando il costo totale nonostante l'aumento di  $r$ . L'impresa continua a usare esattamente la stessa combinazione ( $L^*, K^*$ ): con complementi perfetti il mix tecnico è rigido.

## Esercizio 5

Un'impresa nel breve periodo ha costo totale:

$$TC(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 48$$

- (a) Identificate  $FC$ ,  $VC(Q)$ ,  $AFC(Q)$ ,  $AVC(Q)$ ,  $AC(Q)$  e  $MC(Q)$ .
- (b) Trovate il  $Q^*$  che minimizza  $AC(Q)$ . Verificate che  $MC(Q^*) = AC(Q^*)$ .
- (c) Trovate il  $Q^{**}$  che minimizza  $AVC(Q)$  e calcolate  $AVC(Q^{**})$ .
- (d) Nel lungo periodo esistono tre possibili impianti con costi fissi  $F \in \{48, 27, 75\}$  e la stessa struttura dei costi variabili. Descrivete qualitativamente come si costruisce la  $LAC$  e quale impianto è efficiente per bassi, medi e alti livelli di  $Q$ .

## Soluzione (a)

### (a) Componenti del costo

$$FC = 48, \quad VC(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 15Q$$

$$AFC(Q) = \frac{48}{Q}, \quad AVC(Q) = Q^2 - 6Q + 15$$

$$AC(Q) = AFC + AVC = Q^2 - 6Q + 15 + \frac{48}{Q}$$

$$MC(Q) = \frac{dTC}{dQ} = 3Q^2 - 12Q + 15$$

### Osservazione

$AVC(Q) = Q^2 - 6Q + 15 = (Q - 3)^2 + 6 \geq 6$  per ogni  $Q$ : la  $AVC$  è sempre positiva, con minimo in  $Q = 3$ .

## Soluzione (b)

**(b) Condizione  $MC = AC$**

$$3Q^2 - 12Q + 15 = Q^2 - 6Q + 15 + \frac{48}{Q}$$

$$2Q^2 - 6Q = \frac{48}{Q}$$

$$2Q^3 - 6Q^2 = 48 \Rightarrow Q^3 - 3Q^2 - 24 = 0$$

## Soluzione (b)

Metodo: derivata diretta di  $AC$

$$\frac{dAC}{dQ} = 2Q - 6 - \frac{48}{Q^2} = 0 \Rightarrow 2Q^3 - 6Q^2 - 48 = 0 \Rightarrow Q^3 - 3Q^2 - 24 = 0$$

Non esiste radice intera. Per localizzare  $Q^*$ , valutiamo il segno di  $MC - AC$  in punti interi:

$$Q = 4 : MC - AC = 15 - 19 = -4 < 0 \Rightarrow MC < AC \Rightarrow AC \text{ ancora in calo}$$

$$Q = 5 : MC - AC = 30 - 19,6 = +10,4 > 0 \Rightarrow MC > AC \Rightarrow AC \text{ in salita}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q^* \in (4, 5), \quad Q^* \approx 4,3}$$

## Soluzione (c)

### (c) Minimo di $AVC$

$$\frac{d AVC}{dQ} = 2Q - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{Q^{**} = 3}$$

$$AVC(3) = 9 - 18 + 15 = \boxed{6}$$

$Q^{**} = 3 < Q^* \approx 4,3$ : il minimo di  $AVC$  precede sempre il minimo di  $AC$ .

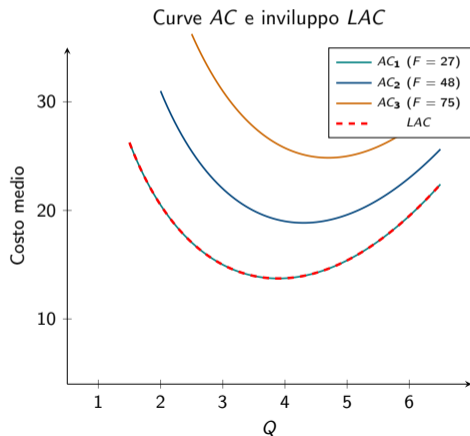
Perché il minimo di  $AC$  è sempre a destra di quello di  $AVC$ ?

$AC = AVC + AFC$ . Poiché  $AFC$  è sempre decrescente, aggiungere  $AFC$  ad  $AVC$  sposta il minimo della somma verso destra: quando  $AVC$  è già al minimo,  $AFC$  sta ancora calando e continua a tirare  $AC$  verso il basso per un altro tratto. Il punto di minimo di  $AC$  si trova dove il calo di  $AFC$  non riesce più a compensare la risalita di  $AVC$ , cioè dove  $MC = AC$ .

## Soluzione (d)

(d) Tre impianti:  $F_1 = 27$ ,  $F_2 = 48$ ,  $F_3 = 75$

Per ognuno:  $AC_i(Q) = Q^2 - 6Q + 15 + F_i/Q$ . La LAC è l'involuppo inferiore:  $LAC(Q) = \min_{i \in \{1,2,3\}} AC_i(Q)$



### Impianto efficiente per intervallo

Le tre  $AC_i$  hanno la stessa  $AVC$ : differiscono solo per  $F_i/Q$ , strettamente decrescente in  $Q$ . Poiché  $F_1 < F_2 < F_3$ , si ha

$$AC_1(Q) < AC_2(Q) < AC_3(Q) \quad \forall Q > 0.$$

$AC_1$  ( $F = 27$ ) domina le altre per *ogni* livello di output: la LAC coincide con  $AC_1$  sull'intero dominio.

Minimo della LAC:  $Q^{**} = 3$ ,  $LAC(3) = 6 + 9 = 15$ .

### Nota

Con una successione *continua* di impianti che differiscono nel solo costo fisso e condividono la stessa  $AVC$ , la LAC collassa sulla curva a costo fisso minimo. Se invece gli impianti differiscono anche nella struttura dei costi variabili, può emergere un genuino involucro a forma di U.

# Riepilogo degli errori tipici all'esame

## Teoria del consumatore

- Dimenticare di verificare la soluzione d'angolo quando  $MU_y/p_y$  è costante (quasi-lineare)
- Confondere  $\lambda$  (utilità marginale del reddito) con l'utilità stessa

## Elasticità

- Dimenticare che l'effetto sostituzione nella Slutsky è sempre  $\leq 0$
- Confondere il segno di  $\varepsilon_P$  con la classificazione elastico/anelastico (si usa il valore assoluto)
- Approssimare variazioni grandi con l'elasticità: l'errore cresce con  $|\Delta p|$

## Tecnologia e produzione

- Usare la derivata per approssimazioni discrete troppo ampie
- Dimenticare che con un input fisso i rendimenti di scala non si testano

## Costi

- Applicare  $MRTS = w/r$  con complementi o sostituti perfetti (non differenziabili)
- Confondere il minimo di  $AVC$  con il minimo di  $AC$  (il secondo è sempre più a destra)
- Dimenticare che  $LAC$  è l'involuppo inferiore, non la media delle  $AC$