Microeconomia

Lezione 3: Vincolo di Bilancio e Scelta Ottima

Marco Rosso

Università di Bologna

A.A. 2025–2026

20 febbraio 2026

Cosa sappiamo finora

- **Preferenze del consumatore** $\rightarrow$ assiomi razionalità
- **Funzione di utilità** $U(x, y)$ $\rightarrow$ rappresentazione numerica
- **Curve di indifferenza** $\rightarrow$ rappresentazione grafica
- **MRS** $= MU_x/MU_y$ $\rightarrow$ trade-off soggettivo tra beni

Domanda aperta:

*Il consumatore sa cosa vuole, ma **cosa può permettersi**?*

Vincolo di Bilancio

Oggi introduciamo il **vincolo di bilancio** (cosa può comprare) e scopriamo come trovare la **scelta ottima** che massimizza utilità dato il vincolo.

Obiettivi della Lezione

Dopo questa lezione sarete in grado di:

1. **Scrivere e interpretare** il vincolo di bilancio
2. **Rappresentare graficamente** la retta di bilancio
3. **Analizzare** l'effetto di variazioni di prezzi e reddito
4. **Formulare** il problema di scelta ottima del consumatore
5. **Risolvere** il problema con metodo sostituzione e Lagrangiano
6. **Calcolare** la scelta ottima per funzioni Cobb-Douglas

Focus della Lezione

Alla fine della lezione saprete trovare esattamente quale paniere (x^*, y^*) massimizza l'utilità del consumatore, dati prezzi e reddito.

Il Problema Economico Fondamentale

Situazione realistica:

- Consumatore ha preferenze (Lezione 2: curve di indifferenza)
- Vorrebbe consumare il più possibile di tutto
- **Ma**: ha risorse limitate (reddito finito)
- Deve pagare prezzi di mercato per i beni

Quindi:

1. Quali panieri (x, y) può permettersi? $\longrightarrow$ *vincolo di bilancio*
2. Quale sceglierà tra quelli accessibili? $\longrightarrow$ *scelta ottima (massimizzazione utilità)*

Vincolo di Bilancio: Definizione

Dati:

- p_x = prezzo unitario del bene x (€/unità)
- p_y = prezzo unitario del bene y (€/unità)
- M = reddito disponibile del consumatore (€)
- (x, y) = quantità acquistate dei due beni

Vincolo di Bilancio

La spesa totale non può superare il reddito:

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y \leq M$$

Interpretazione:

- $p_x \cdot x$ = spesa per il bene x
- $p_y \cdot y$ = spesa per il bene y
- $p_x \cdot x + p_y \cdot y \leq M \rightarrow$ non posso spendere più di quanto ho

Retta di Bilancio

Retta di Bilancio (Budget Line)

Insieme di panieri che esauriscono esattamente il reddito:

$$p_x x + p_y y = M$$

Forma esplicita (risolvendo per y):

$$y = \frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} x$$

Componenti:

- **Intercetta verticale**: $y = M/p_y$ (quando $x = 0$)
  $\rightarrow$ Quantità massima di y acquistabile se spendo tutto in y
- **Intercetta orizzontale**: $x = M/p_x$ (quando $y = 0$)
  $\rightarrow$ Quantità massima di x acquistabile se spendo tutto in x
- **Pendenza**: $-p_x/p_y$ (coefficiente di x)
  $\rightarrow$ Tasso al quale posso sostituire y con x nel mercato

Esempio: Pizze e Birre

- $M = 60$ euro (reddito disponibile)
- $p_x = 10$ euro (prezzo pizza)
- $p_y = 3$ euro (prezzo birra)

Vincolo di bilancio:

$$10x + 3y = 60$$

Forma esplicita:

$$y = \frac{60}{3} - \frac{10}{3}x = 20 - \frac{10}{3}x$$

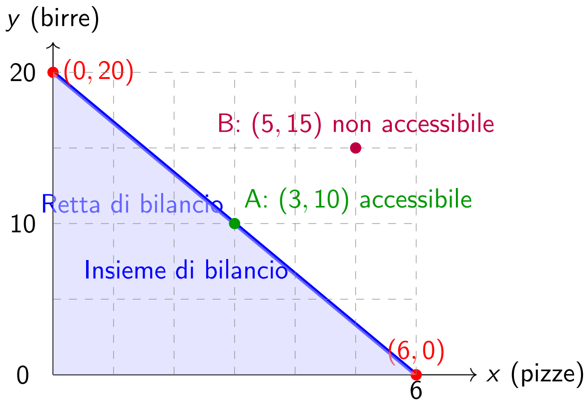
Intercette:

- Massimo pizze (se $y = 0$): $x = 60/10 = 6$ pizze
- Massimo birre (se $x = 0$): $y = 60/3 = 20$ birre

Pendenza: $-10/3 \approx -3.33$
$\rightarrow$ Per comprare 1 pizza in più, devo rinunciare a 3.33 birre

Grafico: Retta di Bilancio

Esempio: $10x + 3y = 60$



Nota: Asse y **compresso** per visualizzazione (coordinate economiche reali: y fino a 20 birre).

Insieme di Bilancio (Budget Set)

Definizione

L'**insieme di bilancio** è l'insieme di tutti i panieri accessibili (acquistabili):

$$B = \{(x, y) : p_x x + p_y y \leq M,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

Componenti:

- **Frontiera**: Retta di bilancio ($p_x x + p_y y = M$)
  $\rightarrow$ Panieri che esauriscono tutto il reddito
- **Interno**: Panieri sotto la retta ($p_x x + p_y y < M$)
  $\rightarrow$ Panieri con spesa inferiore al reddito (risparmio positivo)
- **Vincoli di non negatività**: $x \geq 0,\ y \geq 0$
  $\rightarrow$ Non posso comprare quantità negative

Forma geometrica: Triangolo nel primo quadrante con vertici:

- Origine: $(0, 0)$
- $(M/p_x, 0)$ sull'asse x
- $(0, M/p_y)$ sull'asse y

Interpretazione della Pendenza

Pendenza retta di bilancio: $-p_x/p_y$

Tasso di Sostituzione di Mercato

La pendenza rappresenta il **trade-off oggettivo** imposto dal mercato: quante unità di y devo rinunciare per comprare 1 unità di x.

Esempio: $-p_x/p_y = -10/3$

- Per comprare 1 pizza in più ($\Delta x = +1$):
- Devo spendere 10€ in più
- Riducendo spesa in birre: $10/3 \approx 3.33$ birre in meno
- Quindi: $\Delta y = -10/3$ quando $\Delta x = +1$

Confronto con MRS:

- **MRS** = trade-off *soggettivo* (preferenze consumatore)
- p_x/p_y = trade-off *oggettivo* (prezzi di mercato)
- **Ottimo**: quando i due coincidono! (vedremo dopo)

Esempio: Tre Panieri

Dati: $M = 60$, $p_x = 10$, $p_y = 3$

Paniere A: $(3, 10)$

- Spesa: $10 \cdot 3 + 3 \cdot 10 = 30 + 30 = 60$ ✓
- Sulla retta di bilancio $\rightarrow$ esaurisce reddito

Paniere B: $(2, 8)$

- Spesa: $10 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 20 + 24 = 44 < 60$ ✓
- Interno all'insieme di bilancio $\rightarrow$ risparmio €16

Paniere C: $(5, 15)$

- Spesa: $10 \cdot 5 + 3 \cdot 15 = 50 + 45 = 95 > 60$
- Fuori dall'insieme di bilancio $\rightarrow$ non accessibile

Domanda: Quale sceglierà il consumatore?
$\rightarrow$ Dipende dalle preferenze!

Proprietà del Vincolo di Bilancio

1. **Linearità**
   - La retta è sempre una linea retta (no curve)
   - Pendenza costante $-p_x/p_y$ ovunque
   - Implicazione: tasso di sostituzione di mercato costante
2. **Omogeneità di grado zero**
   - Se moltiplico (p_x, p_y, M) per stessa costante $\lambda > 0$:
     $\lambda p_x x + \lambda p_y y = \lambda M \rightarrow$ insieme di bilancio invariato
   - Esempio: raddoppio tutti i prezzi e il reddito $\rightarrow$ nessun cambiamento reale
   - Implicazione: solo prezzi e reddito *relativi* contano
3. **Convessità**
   - L'insieme di bilancio è convesso (forma triangolare)
   - Media ponderata di due panieri accessibili è accessibile
   - Implicazione: problema di ottimizzazione ben comportato

Riepilogo Parte 1

1. **Vincolo di Bilancio**
   - Equazione: $p_x x + p_y y = M$
   - Limita i panieri accessibili al consumatore
2. **Retta di Bilancio**
   - Forma esplicita: $y = M/p_y - (p_x/p_y)x$
   - Intercette: $(M/p_x, 0)$ e $(0, M/p_y)$
   - Pendenza: $-p_x/p_y$ (trade-off di mercato)
3. **Insieme di Bilancio**
   - Tutti i panieri con $p_x x + p_y y \leq M$
   - Forma triangolare nel primo quadrante

Variazioni del Vincolo

Situazione: Abbiamo capito il vincolo di bilancio per dati (p_x, p_y, M).

Domande:

1. Cosa succede se il **reddito** M aumenta o diminuisce?
2. Cosa succede se un **prezzo** p_x o p_y aumenta o diminuisce?
3. Cosa succede con **inflazione proporzionale** (tutti i prezzi aumentano)?

Obiettivo:

- Capire come si modifica graficamente la retta di bilancio
- Distinguere tra **spostamenti paralleli** e **rotazioni**
- Interpretare economicamente ogni cambiamento

Aumento del Reddito

Scenario: M aumenta a $M' > M$, prezzi invariati.

Nuova retta di bilancio:

$$y = \frac{M'}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x$$

Confronto con retta originale:

- **Pendenza**: $-p_x/p_y$ (invariata)
- **Intercetta verticale**: $M'/p_y > M/p_y$ (aumenta)
- **Intercetta orizzontale**: $M'/p_x > M/p_x$ (aumenta)

Effetto grafico: ***Spostamento parallelo verso l'esterno***

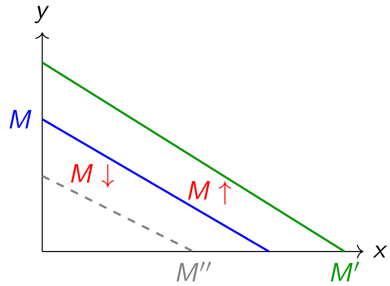
Interpretazione economica:

- Posso comprare più di entrambi i beni
- Insieme di bilancio si espande
- Trade-off di mercato (p_x/p_y) resta lo stesso

Diminuzione del Reddito

Scenario: M diminuisce a $M'' < M$, prezzi invariati.

Effetto: Spostamento parallelo verso l'interno



Regola generale:

- $M \uparrow \rightarrow$ retta si sposta verso l'esterno (parallelamente)
- $M \downarrow \rightarrow$ retta si sposta verso l'interno (parallelamente)
- Pendenza sempre invariata

Aumento del Prezzo di x

Scenario: p_x aumenta a $p'_x > p_x$, M e p_y invariati.

Nuova retta:

$$y = \frac{M}{p_y} - \frac{p'_x}{p_y}x$$

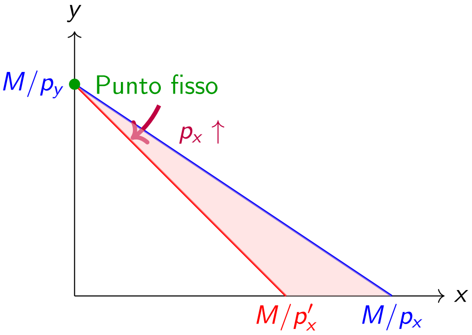
Confronto:

- **Intercetta verticale**: M/p_y (invariata)
  $\rightarrow$ Se compro solo y, p_x non importa
- **Intercetta orizzontale**: $M/p'_x < M/p_x$ (diminuisce)
  $\rightarrow$ Posso comprare meno x
- **Pendenza**: $-p'_x/p_y$ più ripida (in valore assoluto)
  $\rightarrow$ x è diventato relativamente più costoso

Effetto grafico: Rotazione verso l'interno attorno all'intercetta verticale

Grafico: Variazione p_x

Aumento p_x: Rotazione verso l'interno



Intercetta verticale invariata
Intercetta orizzontale diminuisce

Interpretazione: x più costoso $\rightarrow$ posso comprare meno x (a parità di altri fattori)

Diminuzione del Prezzo di x

Scenario: p_x diminuisce a $p_x'' < p_x$, M e p_y invariati.

Effetto: Rotazione verso l'esterno attorno all'intercetta verticale

- Intercetta verticale: invariata
- Intercetta orizzontale: $M/p_x'' > M/p_x$ (aumenta)
- Pendenza: meno ripida (in valore assoluto)

Analogamente per variazioni di p_y:

- $p_y \uparrow$: Rotazione verso l'interno attorno all'intercetta orizzontale
- $p_y \downarrow$: Rotazione verso l'esterno attorno all'intercetta orizzontale

Regola generale:

- Prezzo aumenta $\rightarrow$ rotazione verso l'interno
- Prezzo diminuisce $\rightarrow$ rotazione verso l'esterno
- Punto fisso: intercetta del bene il cui prezzo NON è cambiato

Inflazione Proporzionale

Scenario: Tutti i prezzi e il reddito aumentano dello stesso fattore $\lambda > 1$:

$$p'_x = \lambda p_x, \quad p'_y = \lambda p_y, \quad M' = \lambda M$$

Nuova retta di bilancio:

$$\lambda p_x x + \lambda p_y y = \lambda M$$

Dividendo per λ:

$$p_x x + p_y y = M$$

$\rightarrow$ **Identica alla retta originale!**

Omogeneità di Grado Zero

Inflazione proporzionale **non cambia** l'insieme di bilancio reale. Solo i prezzi e il reddito *relativi* contano per le scelte del consumatore.

Implicazione: Il consumatore non soffre "illusione monetaria", ma reagisce a variazioni reali, non nominali.

Esempio: Inflazione del 50%

Situazione originale:

- $M = 60$ euro, $p_x = 10$ euro, $p_y = 3$ euro
- Retta: $10x + 3y = 60 \to y = 20 - (10/3)x$

Dopo inflazione 50% ($\lambda = 1.5$):

- $M' = 90$ euro, $p'_x = 15$ euro, $p'_y = 4.5$ euro
- Retta: $15x + 4.5y = 90$

Dividendo per 1.5:

$$10x + 3y = 60$$

Identica alla retta originale! ✓

Verifica intercette:

- Originale: $(6, 0)$ e $(0, 20)$
- Dopo inflazione: $(90/15, 0) = (6, 0)$ e $(0, 90/4.5) = (0, 20)$ ✓

Tabella Riepilogativa: Variazioni

Variazione	Effetto Grafico	Interpretazione
$M \uparrow$	Spostamento parallelo esterno	Più potere d'acquisto
$M \downarrow$	Spostamento parallelo interno	Meno potere d'acquisto
$p_x \uparrow$	Rotazione interna (fisso su asse y)	x relativamente più costoso
$p_x \downarrow$	Rotazione esterna (fisso su asse y)	x relativamente più economico
$p_y \uparrow$	Rotazione interna (fisso su asse x)	y relativamente più costoso
$p_y \downarrow$	Rotazione esterna (fisso su asse x)	y relativamente più economico
Inflazione λ su tutto	Nessun cambiamento	Solo prezzi relativi contano

Esercizio: Identifica la Variazione

Retta originale: $5x + 2y = 100$

Domanda: Quale variazione causa ciascuna nuova retta?

a) $5x + 2y = 150$

Risposta: M aumentato da 100 a 150 (spostamento parallelo esterno) ✓

b) $10x + 2y = 100$

Risposta: p_x raddoppiato (da 5 a 10), rotazione interna attorno $(0, 50)$ ✓

c) $10x + 4y = 200$

Risposta: Inflazione 100%: tutti i prezzi e M raddoppiati $\rightarrow$ **stessa retta!** ✓

d) $5x + 4y = 100$

Risposta: p_y raddoppiato (da 2 a 4), rotazione interna attorno $(20, 0)$ ✓

Riepilogo Parte 2

1. **Variazioni di Reddito**
   - $M \uparrow$ o $M \downarrow \to$ spostamento parallelo (pendenza invariata)

2. **Variazioni di Prezzo**
   - p_x cambia $\to$ rotazione attorno intercetta y
   - p_y cambia $\to$ rotazione attorno intercetta x
   - Prezzo $\uparrow \to$ rotazione interna (meno accessibile)
   - Prezzo $\downarrow \to$ rotazione esterna (più accessibile)

3. **Inflazione Proporzionale**
   - Se (p_x, p_y, M) moltiplicati per $\lambda \to$ insieme invariato
   - Solo prezzi/reddito *relativi* contano

Scelta Ottima del Consumatore

- Consumatore ha preferenze: $U(x, y)$ (curve di indifferenza)
- Deve rispettare vincolo: $p_x x + p_y y = M$ (retta di bilancio)

Domanda: Quale paniere (x^*, y^*) sceglierà?

Problema di Massimizzazione Vincolata

Il consumatore sceglie il paniere che:

- Massimizza la propria utilità
- Tra tutti quelli accessibili (nel budget set)

Formalmente:

$$\max_{x,y} \quad U(x, y)$$

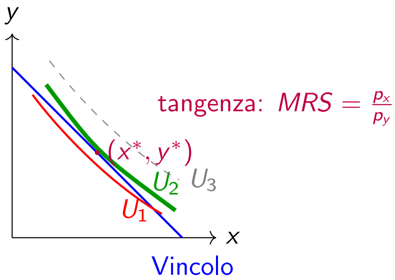
$$\text{s.t.} \quad p_x x + p_y y = M$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Soluzione Grafica: Condizione di Tangenza

Idea intuitiva:

- Voglio raggiungere la curva di indifferenza più alta possibile
- Ma devo restare sull'insieme di bilancio
- Soluzione ottima: dove curva di indifferenza è **tangente** alla retta di bilancio



U_1: Accessibile ma non ottimale (posso fare meglio)
U_2: Tangente $\rightarrow$ ottimo!
U_3: Troppo alta, fuori dal budget

Condizione Matematica: Tangenza

Al punto ottimo (x^*, y^*):

Condizione di Tangenza

La pendenza della curva di indifferenza deve uguagliare la pendenza della retta di bilancio:

$$MRS = \frac{p_x}{p_y}$$

In termini di utilità marginali:

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_x}{p_y} \quad \longrightarrow \quad \frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y}$$

Principio Equi-Marginale

All'ottimo, l'**utilità marginale per euro speso** deve essere uguale per entrambi i beni.

Intuizione: Se $MU_x/p_x > MU_y/p_y$, conviene spostare 1€ da y a x per aumentare utilità totale.

Perché la Tangenza?

Ragionamento per assurdo:

Supponiamo all'ottimo $MRS > p_x/p_y$ (es: $MRS = 3$, $p_x/p_y = 2$):

- MRS = 3: Consumatore disposto a cedere 3 unità di y per 1 di x
- $p_x/p_y = 2$: Mercato richiede solo 2 unità di y per 1 di x
- **Conclusione**: Consumatore può migliorare comprando più x e meno y!
  $\rightarrow$ Il punto non era ottimo

Analogamente, se $MRS < p_x/p_y$:

- Consumatore può migliorare comprando più y e meno x

Solo quando $MRS = p_x/p_y$**:**

- Nessuno scambio marginale può migliorare l'utilità
- $\rightarrow$ Ottimo locale raggiunto

Metodo 1: Sostituzione

Problema:

$$\max_{x,y} \quad U(x,y) \quad \text{s.t.} \quad p_x x + p_y y = M$$

Strategia:

1. Dal vincolo, esprimi y in funzione di x:

$$y = \frac{M - p_x x}{p_y}$$

2. Sostituisci in $U(x,y) \rightarrow$ funzione di solo x:

$$\tilde{U}(x) = U\left(x, \frac{M - p_x x}{p_y}\right)$$

3. Massimizza rispetto a x:

$$\frac{d\tilde{U}}{dx} = 0$$

4. Risolvi per x^*
5. Sostituisci x^* nel vincolo per trovare y^*

Esempio: Sostituzione con Cobb-Douglas

Problema: $U(x, y) = x^{0.5}y^{0.5}$, vincolo $10x + 5y = 100$

Step 1: Vincolo $\rightarrow$ $y = (100 - 10x)/5 = 20 - 2x$

Step 2: Sostituisci in U:

$$\tilde{U}(x) = x^{0.5}(20 - 2x)^{0.5}$$

Step 3: Derivata e uguaglia a zero:

$$\frac{d\tilde{U}}{dx} = 0.5x^{-0.5}(20 - 2x)^{0.5} + x^{0.5} \cdot 0.5(20 - 2x)^{-0.5} \cdot (-2) = 0$$

Semplificando (moltiplicando per $2x^{0.5}(20 - 2x)^{0.5}$):

$$(20 - 2x) - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 = 4x \quad \Rightarrow \quad x^* = 5$$

Step 4: $y^* = 20 - 2(5) = 10$

Soluzione ottima: $(x^*, y^*) = (5, 10)$ ✓

Metodo 2: Lagrangiana

Problema:

$$\max_{x,y} \quad U(x,y) \quad \text{s.t.} \quad p_x x + p_y y = M$$

Funzione Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = U(x,y) - \lambda(p_x x + p_y y - M)$$

dove λ è il **moltiplicatore di Lagrange**.

Condizioni del primo ordine (CPO):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= MU_x - \lambda p_x = 0 \quad \Rightarrow \quad MU_x = \lambda p_x \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= MU_y - \lambda p_y = 0 \quad \Rightarrow \quad MU_y = \lambda p_y \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= M - p_x x - p_y y = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x x + p_y y = M
\end{aligned}$$

Sistema di 3 equazioni in 3 incognite: (x, y, λ)

Derivazione Condizione di Tangenza dalla Lagrangiana

Dalle CPO:

$$MU_x = \lambda p_x \quad \text{e} \quad MU_y = \lambda p_y$$

Dividendo la prima per la seconda:

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\lambda p_x}{\lambda p_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

$\rightarrow$ Otteniamo la condizione di tangenza:

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_x}{p_y} \quad \checkmark$$

Interpretazione di λ:
Da $MU_x = \lambda p_x \rightarrow \lambda = MU_x / p_x$

- $\lambda =$ utilità marginale del reddito
- Quanto aumenta U se ho 1€ in più da spendere
- All'ottimo: $\lambda > 0$ (vincolo è "stringente", vorrei più reddito)

Esempio: Lagrangiana con Cobb-Douglas (1)

$U(x, y) = x^{0.5}y^{0.5}$, vincolo $10x + 5y = 100$

Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = x^{0.5}y^{0.5} - \lambda(10x + 5y - 100)$$

CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0.5x^{-0.5}y^{0.5} - 10\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0.5x^{0.5}y^{-0.5} - 5\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 100 - 10x - 5y = 0$$

Esempio: Lagrangiana con Cobb-Douglas (2)

Dalle prime due:

$$0.5\left(\frac{y}{x}\right)^{0.5} = 10\lambda, \quad 0.5\left(\frac{x}{y}\right)^{0.5} = 5\lambda$$

Dividendo:

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{0.5}}{\left(\frac{x}{y}\right)^{0.5}} = \frac{10}{5} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y}{x}\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2x$$

Sostituendo nel vincolo: $10x + 5(2x) = 100 \to 20x = 100 \to x^* = 5,\ y^* = 10$ ✓

Formula Generale: Cobb-Douglas

Funzione di utilità: $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$
Vincolo: $p_x x + p_y y = M$

Soluzione Ottima

$$x^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{M}{p_x}$$

$$y^* = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{M}{p_y}$$

Interpretazione:

- Frazione $\alpha/(\alpha + \beta)$ del reddito spesa in x
- Frazione $\beta/(\alpha + \beta)$ del reddito spesa in y
- Le quote di spesa dipendono solo da α, β (non da prezzi!)

Caso speciale: Se $\alpha = \beta$ (es: $U = xy$):

$$x^* = \frac{M}{2p_x}, \quad y^* = \frac{M}{2p_y} \quad \longrightarrow \quad \textit{metà del reddito per ciascun bene}$$

Caso $\alpha = \beta = 0.5$

$U = x^{0.5}y^{0.5},\ p_x = 10,\ p_y = 5,\ M = 100$

Formula generale:

$$x^* = \frac{0.5}{0.5+0.5} \cdot \frac{100}{10} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$
$$y^* = \frac{0.5}{0.5+0.5} \cdot \frac{100}{5} = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$$

Verifica vincolo:

$$10 \cdot 5 + 5 \cdot 10 = 50 + 50 = 100 \quad \checkmark$$

Verifica tangenza:

$$MU_x = 0.5\,x^{-0.5}y^{0.5}, \quad MU_y = 0.5\,x^{0.5}y^{-0.5}$$
$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{0.5}{0.5} \cdot \frac{y}{x} = \frac{y}{x} = \frac{10}{5} = 2$$
$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{10}{5} = 2 \quad \checkmark$$

$MRS = p_x/p_y \rightarrow$ condizione di tangenza soddisfatta!

Esercizio 1

Problema: $U(x, y) = x^{0.6}y^{0.4}$, $p_x = 4$, $p_y = 2$, $M = 120$

a: Trova la scelta ottima (x^*, y^*).

Soluzione:

$$x^* = \frac{0.6}{0.6 + 0.4} \cdot \frac{120}{4} = 0.6 \cdot 30 = 18$$
$$y^* = \frac{0.4}{1} \cdot \frac{120}{2} = 0.4 \cdot 60 = 24$$

b: Verifica che il vincolo è soddisfatto.

Soluzione: $4 \cdot 18 + 2 \cdot 24 = 72 + 48 = 120$ ✓

c: Calcola MRS all'ottimo e verifica tangenza.

Soluzione:

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{0.6}{0.4} \cdot \frac{y}{x} = 1.5 \cdot \frac{24}{18} = 1.5 \cdot \frac{4}{3} = 2$$
$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{4}{2} = 2 \quad \checkmark$$

Esercizio 2

Problema: $U(x, y) = \ln x + 2\ln y,\ p_x = 3,\ p_y = 6,\ M = 90$

Nota: $\ln x + 2\ln y = \ln x + \ln y^2 = \ln(xy^2) \rightarrow$ Equivalente a $U = x^1 y^2$ (trasformazione monotona)

Domanda: Trova (x^*, y^*).
Soluzione: Identifico $\alpha = 1,\ \beta = 2$:

$$x^* = \frac{1}{1+2} \cdot \frac{90}{3} = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$$

$$y^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{90}{6} = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10$$

Verifica: $3 \cdot 10 + 6 \cdot 10 = 30 + 60 = 90$ ✓

Interpretazione quote di spesa:

- Spesa in x: $3 \cdot 10 = 30$ (1/3 del reddito)
- Spesa in y: $6 \cdot 10 = 60$ (2/3 del reddito)
- Quote riflettono pesi $\alpha = 1,\ \beta = 2$

Casi Speciali: Sostituti e Complementi Perfetti

Sostituti perfetti: $U(x, y) = ax + by$

- MRS costante: $MRS = a/b$ (sempre)
- Confronto con p_x/p_y:
  - Se $a/b > p_x/p_y$: Ottimo: comprare solo x (soluzione d'angolo)
  - Se $a/b < p_x/p_y$: Ottimo: comprare solo y (soluzione d'angolo)
  - Se $a/b = p_x/p_y$: Indifferenza (qualsiasi punto sulla retta)

Complementi perfetti: $U(x, y) = \min\{ax, by\}$

- Ottimo sempre al vertice: $ax^* = by^*$ (proporzione fissa)
- Risolvendo con vincolo:

$$x^* = \frac{bM}{bp_x + ap_y}, \quad y^* = \frac{aM}{bp_x + ap_y}$$

Nota: Per questi casi, il metodo Lagrangiano standard non funziona (funzione non differenziabile). Usiamo ragionamento economico + vincolo.

Soluzioni d'Angolo: Quando l'Ottimo è Estremo

Finora: Soluzioni interne con tangenza ($MRS = p_x/p_y$)

Ma a volte: La soluzione ottima è su un **estremo** del vincolo!

Soluzione d'Angolo

Il consumatore spende tutto il reddito in **un solo bene** (l'altro a quantità zero)

Quando succede?

1. **Sostituti perfetti** con $MRS \neq p_x/p_y$
2. **Preferenze molto sbilanciate** (un bene molto più desiderato)
3. **Prezzi relativi estremi** (un bene troppo costoso rispetto all'utilità)

Caratteristica: La curva di indifferenza **non** è tangente alla retta, ma la "tocca" in un vertice (intercetta)

Esempio: Sostituti Perfetti

Problema: $U(x, y) = 2x + 3y$ (sostituti perfetti)
Vincolo: $4x + 6y = 120$
Dati: $p_x = 4$ €, $p_y = 6$ €, $M = 120$ €

Step 1: Calcola MRS

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{2}{3} \approx 0.67$$

Step 2: Calcola rapporto prezzi

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0.67$$

Step 3: Confronta

$$MRS = \frac{2}{3} = \frac{p_x}{p_y} \quad \Rightarrow \quad \text{Indifferenza!}$$

Soluzione

Il consumatore è **indifferente** tra qualsiasi paniere sulla retta di bilancio.
Soluzioni ottimali: **tutti i punti** da $(30, 0)$ a $(0, 20)$ sono ugualmente buoni!

Esempio: Soluzione d'Angolo Pura (1)

Problema: $U(x, y) = 3x + 2y$ (sostituti perfetti)
Vincolo: $5x + 4y = 100$
Dati: $p_x = 5$ €, $p_y = 4$ €, $M = 100$ €

Step 1: Calcola MRS

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Step 2: Calcola rapporto prezzi

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{5}{4} = 1.25$$

Step 3: Confronta

$$MRS = 1.5 > \frac{p_x}{p_y} = 1.25$$

Esempio: Soluzione d'Angolo Pura (2)

Interpretazione:

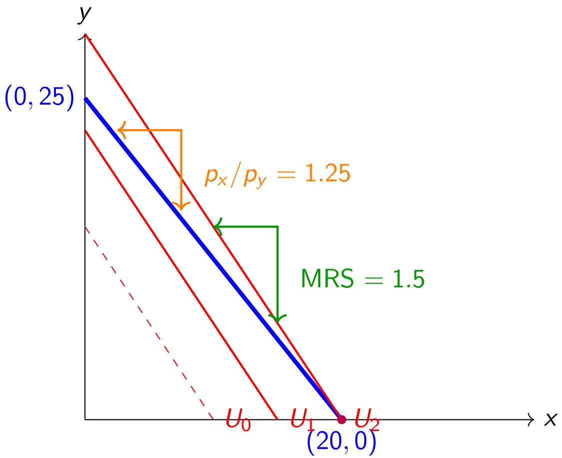
- Consumatore valuta x più di quanto il mercato lo prezza relativamente
- Per lui: 1 unità di x vale 1.5 unità di y
- Ma nel mercato: 1 unità di x costa solo 1.25 unità di y
- **Convenienza:** Comprare solo x!

Soluzione Ottima: Angolo

$$x^* = \frac{M}{p_x} = \frac{100}{5} = 20, \quad y^* = 0$$

Grafico: Soluzione d'Angolo

Caso: $MRS = 1.5 > p_x/p_y = 1.25$



Curve più ripide del vincolo → soluzione d'angolo in x

Caso Opposto: Comprare solo y

Problema: $U(x, y) = x + 3y$ (sostituti perfetti)
Vincolo: $4x + 2y = 80$

Calcoli:

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{1}{3} \approx 0.33$$

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{4}{2} = 2$$

Confronto:

$$MRS = 0.33 < \frac{p_x}{p_y} = 2$$

Interpretazione:

- Consumatore valuta x **meno** di quanto il mercato lo prezza
- Per lui: 1 unità di x vale solo 0.33 unità di y
- Ma nel mercato: 1 unità di x costa 2 unità di y
- **Convenienza:** Comprare solo y!

Regola Pratica: Soluzioni d'Angolo (1)

Per sostituti perfetti $U = ax + by$:

Regola Decisionale

1. Calcola $MRS = a/b$
2. Calcola p_x/p_y
3. Confronta:
   - Se $\frac{a}{b} > \frac{p_x}{p_y}$ $\rightarrow$ Compra solo x: $(M/p_x, 0)$
   - Se $\frac{a}{b} < \frac{p_x}{p_y}$ $\rightarrow$ Compra solo y: $(0, M/p_y)$
   - Se $\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y}$ $\rightarrow$ Indifferenza (qualsiasi punto sul vincolo)

Regola Pratica: Soluzioni d'Angolo (2)

Intuizione economica:

- Scegli il bene con **migliore rapporto utilità/prezzo**
- $MRS > p_x/p_y$: x dà più "bang for the buck"
- $MRS < p_x/p_y$: y dà più "bang for the buck"

Nota: Con preferenze convesse (Cobb-Douglas, etc.), soluzioni d'angolo sono rare—servono vincoli aggiuntivi (es: $x, y \geq 0$ vincolanti per altri motivi).

Esercizio: Identifica il Tipo di Soluzione

Per ciascun caso, determina se la soluzione è interna o d'angolo, e trova l'ottimo.

a) $U = 4x + 2y$, vincolo $3x + 6y = 90$

Soluzione: $MRS = 4/2 = 2$, $p_x/p_y = 3/6 = 0.5$
$MRS = 2 > 0.5 \rightarrow$ Angolo: $(x^*, y^*) = (30, 0)$ ✓

b) $U = x + 4y$, vincolo $2x + 3y = 60$

Soluzione: $MRS = 1/4 = 0.25$, $p_x/p_y = 2/3 \approx 0.67$
$MRS = 0.25 < 0.67 \rightarrow$ Angolo: $(x^*, y^*) = (0, 20)$ ✓

c) $U = x^{0.5}y^{0.5}$, vincolo $4x + 2y = 80$

Soluzione: Cobb-Douglas $\rightarrow$ Soluzione **interna** (sempre con preferenze convesse)
Formula: $x^* = 0.5 \cdot 80/4 = 10$, $y^* = 0.5 \cdot 80/2 = 20$ ✓

d) $U = 3x + 3y$, vincolo $2x + 2y = 100$

Soluzione: $MRS = 3/3 = 1$, $p_x/p_y = 2/2 = 1$
$MRS = p_x/p_y \rightarrow$ **Indifferenza** totale: qualsiasi punto da $(50, 0)$ a $(0, 50)$ ✓

Riepilogo Generale

Parte 1: Vincolo di Bilancio

- Equazione: $p_x x + p_y y = M$
- Retta con pendenza $-p_x/p_y$ (trade-off di mercato)
- Insieme di bilancio: panieri accessibili

Parte 2: Variazioni

- M cambia $\rightarrow$ spostamento parallelo
- Prezzi cambiano $\rightarrow$ rotazione
- Inflazione proporzionale $\rightarrow$ nessun effetto reale

Parte 3: Scelta Ottima

- Condizione: $MRS = p_x/p_y$ (tangenza)
- Metodi: sostituzione e Lagrangiano
- Formula Cobb-Douglas: $x^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{M}{p_x}$

Competenze Acquisite

- ✓ Scrivere e disegnare il vincolo di bilancio
- ✓ Analizzare effetti di variazioni di prezzi/reddito
- ✓ Formulare il problema di massimizzazione del consumatore
- ✓ Applicare metodo sostituzione e Lagrangiano
- ✓ Calcolare scelta ottima per Cobb-Douglas
- ✓ Verificare la condizione di tangenza

Esercizi Facoltativi per Casa

1. $U = x^{0.4}y^{0.6}$, $p_x = 2$, $p_y = 4$, $M = 80$. Trova (x^*, y^*).

2. Stesso problema. Ora M aumenta a 120. Trova nuovo ottimo.

3. $U = \ln x + \ln y$, $p_x = 3$, $p_y = 6$, $M = 90$. Trova (x^*, y^*) con Lagrangiano.

4. Verifica che con $U = xy$, se M raddoppia, anche (x^*, y^*) raddoppiano.

5. Disegna retta di bilancio per $2x + 4y = 100$. Poi grafica effetto di:

a) M aumenta a 150

b) p_x raddoppia

c) Inflazione 50% su tutto