Microeconomia

Lezione 9: Minimizzazione dei Costi e Scelta Ottimale dei Fattori

Marco Rosso

Università di Bologna

A.A. 2025–2026

13 marzo 2026

Cosa sappiamo finora

- tecnologia, isoquanti, $MRTS = MPL/MPK$, rendimenti di scala
- costi di lungo periodo: TC, AC, MC, loro forma e le loro relazioni

Prossimo passo

come *nasce* la funzione di costo di lungo periodo. ossia dato Q, quale mix (L, K) costa meno?

Obiettivi della lezione

Al termine di questa lezione sarete in grado di:

1. Impostare il problema di minimizzazione: $\min wL + rK$ s.t. $f(L, K) \geq Q$
2. Costruire e interpretare le rette di **isocosto**
3. Derivare la **condizione di tangenza**: $MRTS = w/r$
4. Risolvere il problema con tecnologia Cobb–Douglas
5. Fare **statica comparata**: effetti di variazioni di w o r su (L^*, K^*)
6. Collegare la scelta ottimale dei fattori a decisioni aziendali reali

Simmetria con il consumatore

Il consumatore *massimizza l'utilità* dato il bilancio.
L'impresa *minimizza il costo* dato il vincolo produttivo.
Stessa struttura matematica, direzione invertita.

Il problema di minimizzazione dei costi (LP)

$$\min_{L,K} \; C = wL + rK \qquad \text{s.t.} \qquad f(L,K) \geq Q$$

- w: salario (costo per unità di lavoro)
- r: costo del capitale (canone di leasing, tasso di rendimento richiesto)
- Il vincolo è l'isoquanto $f(L,K) = Q$

Obiettivo geometrico: trovare il punto sull'isoquanto che si trova sull'isocosto più basso possibile.

Esempio: un'impresa di logistica

Deve consegnare 10.000 pacchi al giorno ($Q = 10.000$). Può farlo con molti corrieri e pochi furgoni, oppure con molti furgoni automatizzati e pochi corrieri. Il mix ottimale dipende da w (costo del lavoro) e r (costo di leasing dei furgoni).

Rette di isocosto

L'isocosto è l'insieme di combinazioni (L, K) che costano lo stesso:

$$C = wL + rK \quad \Rightarrow \quad K = \frac{C}{r} - \frac{w}{r}L$$

- Intercetta su K: C/r — quante unità di K puoi comprare con tutto il budget
- Intercetta su L: C/w — quante unità di L con tutto il budget
- **Pendenza**: $-w/r$ — il prezzo relativo del lavoro rispetto al capitale

Spostamenti dell'isocosto:

- Isocosto più alto (parallelo, più lontano dall'origine) $\Rightarrow$ spesa maggiore
- Se $w \uparrow$: l'isocosto diventa più ripido (il lavoro è relativamente più caro)
- Se $r \uparrow$: l'isocosto diventa meno ripido

Esercizio: Isocosto

Dati $w = 12$, $r = 24$, budget $C = 240$.

1. Scrivi l'equazione dell'isocosto in forma $K = \dots$
2. Trova le intercette su L e su K.
3. Qual è la pendenza?
4. Se w aumenta a 18 (a parità di r e C), come cambia l'isocosto? Disegnalo schematicamente.

Soluzione

$$240 = 12L + 24K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{240}{24} - \frac{12}{24}L = 10 - \frac{1}{2}L$$

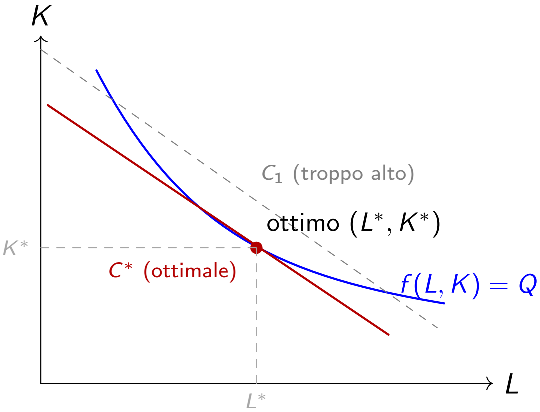
$$\text{Intercetta su } K: \quad L = 0 \Rightarrow K = 10$$

$$\text{Intercetta su } L: \quad K = 0 \Rightarrow L = 20$$

$$\text{Pendenza} = -\frac{w}{r} = -\frac{12}{24} = -\frac{1}{2}$$

Se $w = 18$: $K = 10 - \frac{18}{24}L = 10 - \frac{3}{4}L$. **L'isocosto ruota verso il basso sull'asse** L: intercetta su L cade a $240/18 \approx 13.3$, l'isocosto diventa più ripido (pendenza $-3/4$).

La condizione di ottimo: isoquanto + isocosto



Condizione di tangenza: $MRTS = w/r$

All'ottimo interno, l'isoquanto e l'isocosto sono **tangenti**:

$$MRTS_{LK} = \frac{MPL}{MPK} = \frac{w}{r}$$

Forma equivalente (produttività marginale per euro speso):

$$\frac{MPL}{w} = \frac{MPK}{r}$$

Intuizione

Se $\frac{MPL}{w} > \frac{MPK}{r}$: un euro in più di lavoro produce più output di un euro in più di capitale. Conviene spostare spesa verso L (e ridurre K) finché i rendimenti per euro si eguagliano.

Esercizio: Condizione di ottimo

In un punto dell'isoquanto un'impresa osserva:

$$MPL = 8, \quad MPK = 4, \quad w = 16, \quad r = 24$$

1. Calcola $\dfrac{MPL}{MPK}$ (MRTS) e $\dfrac{w}{r}$.
2. Siamo all'ottimo?
3. Se non siamo all'ottimo, in che direzione conviene muoversi? (più L e meno K, o viceversa?)
4. Cosa accade alle produttività marginali mentre ci spostiamo verso l'ottimo?

Soluzione

$$MRTS = \frac{MPL}{MPK} = \frac{8}{4} = 2, \qquad \frac{w}{r} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

Non siamo all'ottimo: $MRTS = 2 > 2/3 = w/r$.

Equivalentemente:

$$\frac{MPL}{w} = \frac{8}{16} = 0.5 \quad > \quad \frac{MPK}{r} = \frac{4}{24} \approx 0.167$$

Il lavoro rende di più per euro speso $\Rightarrow$ conviene **aumentare L e ridurre K**.

Spostandosi: MPL tende a scendere (rendimenti decrescenti di L), MPK tende a salire (meno K usato), finché $MPL/w = MPK/r$.

Esercizio: Minimizzazione con la Lagrangiana

Tecnologia: $Q = L^{0.5}K^{0.5}$. Prezzi: $w = 4$, $r = 9$. Target: $Q = 6$.

Imposta e risolvi il problema con la **Lagrangiana**:

$$\mathcal{L}(L, K, \lambda) = wL + rK - \lambda\big[f(L, K) - Q\big]$$

1. Scrivi esplicitamente $\mathcal{L}$ con i valori numerici.
2. Deriva le tre condizioni del primo ordine.
3. Ricava L^*, K^* e il valore del moltiplicatore λ^*.
4. Interpreta economicamente λ^*.

Soluzione

La Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = 4L + 9K - \lambda\left[L^{0.5}K^{0.5} - 6\right]$$

Condizioni del primo ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 4 - \lambda \cdot 0.5L^{-0.5}K^{0.5} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 9 - \lambda \cdot 0.5L^{0.5}K^{-0.5} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\left[L^{0.5}K^{0.5} - 6\right] = 0$$

Dividendo la prima per la seconda:

$$\frac{4}{9} = \frac{K^{0.5}L^{-0.5}}{L^{0.5}K^{-0.5}} = \frac{K}{L} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{4}{9}L$$

Ritroviamo esattamente la condizione $MRTS = w/r$: la geometria e il calcolo dicono la stessa cosa.

Soluzione

Vincolo output:

$$L^{0.5}\left(\frac{4}{9}L\right)^{0.5} = 6 \quad \Rightarrow \quad L\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{0.5} = 6 \quad \Rightarrow \quad L^* = \frac{6}{\frac{2}{3}} = 9$$

$$K^* = \frac{4}{9}\cdot 9 = 4$$

Costo minimo:

$$C^* = 4\cdot 9 + 9\cdot 4 = 36 + 36 = 72$$

Moltiplicatore λ^* (dalla prima CPO):

$$\lambda^* = \frac{4}{0.5\cdot L^{*-0.5}K^{*0.5}} = \frac{4}{0.5\cdot 9^{-0.5}\cdot 4^{0.5}} = \frac{4}{0.5\cdot\frac{1}{3}\cdot 2} = \frac{4}{1/3} = 12$$

Interpretazione di λ^*

$\lambda^* = 12$ è il **costo marginale di lungo periodo**: produrre un'unità aggiuntiva oltre $Q = 6$ costa esattamente 12 in più. Il moltiplicatore misura quanto il costo minimo aumenta al margine all'aumentare del target produttivo.

Tecnologia Cobb–Douglas

Per $Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$, la condizione di tangenza diventa:

$$MRTS = \frac{MPL}{MPK} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{K}{L} = \frac{w}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{K}{L} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{w}{r} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{w}{r} \cdot L$$

Procedura completa:

1. Ricava il rapporto K/L dalla condizione di tangenza
2. Sostituisci nel vincolo $f(L, K) = Q$ per trovare L^*
3. Ricava K^* dal rapporto
4. Calcola $C^* = wL^* + rK^*$

Esercizio: Minimizzazione completa

Tecnologia: $Q = L^{0.6}K^{0.4}$

Prezzi: $w = 10$, $r = 20$. Target: $Q = 50$.

1. Trova il rapporto ottimo K/L.
2. Ricava L^* e K^*.
3. Calcola il costo minimo $C^* = wL^* + rK^*$.
4. Come cambia il rapporto K/L se w aumenta a 15?

Soluzione

Passo 1 — Rapporto ottimo:

$$\frac{K}{L} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{w}{r} = \frac{0.4}{0.6} \cdot \frac{10}{20} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow K = \frac{L}{3}$$

Passo 2 — Vincolo output (nota: $\alpha + \beta = 1$):

$$50 = L^{0.6} \left(\frac{L}{3}\right)^{0.4} = L^{0.6} \cdot L^{0.4} \cdot 3^{-0.4} = L \cdot 3^{-0.4}$$

$$L^* = 50 \cdot 3^{0.4} \approx 50 \cdot 1.552 \approx 77.6$$

$$K^* = \frac{L^*}{3} = \frac{50 \cdot 3^{0.4}}{3} = 50 \cdot 3^{-0.6} \approx 25.9$$

Soluzione

Passo 3 — Costo minimo:

$$C^* = wL^* + rK^* = 10 \cdot 77.6 + 20 \cdot 25.9 = 776 + 518 = 1294$$

Interpretazione

Con $r = 20 > w = 10$, il capitale è relativamente caro: il mix ottimo è $K/L = 1/3$, ossia molto più lavoro che capitale. L'impresa è labour-intensive.

Passo 4 — Se w aumenta a 15:

$$\frac{K}{L} = \frac{0.4}{0.6} \cdot \frac{15}{20} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

Il rapporto K/L sale da $1/3$ a $1/2$: l'impresa sostituisce lavoro con capitale.

Statica comparata: effetti di w e r

Dalla condizione ottimale $\dfrac{K}{L} = \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \dfrac{w}{r}$:

Shock	**Effetto su K/L**	**Interpretazione**
$w\uparrow$	$K/L\uparrow$	Sostituisce L con K (automazione)
$w\downarrow$	$K/L\downarrow$	Usa più lavoro, meno capital
$r\uparrow$	$K/L\downarrow$	Capitale più caro, preferisce L
$r\downarrow$	$K/L\uparrow$	Sussidio a investimenti $\Rightarrow$ più K

Nota: Il costo minimo C^* aumenta sempre quando w o r salgono (si paga di più per lo stesso output).

Esempio: Amazon e l'automazione dei magazzini

Contesto: Amazon ha investito miliardi in robot Kiva per i suoi fulfillment center.

Interpretazione in termini di w e r:

- Negli ultimi 10 anni i salari nel settore logistico in USA (e in Italia) sono aumentati
- $w \uparrow \Rightarrow$ il rapporto ottimo K/L aumenta: conviene sostituire lavoro con robot
- Parallelamente, il costo dei robot è sceso ($r \downarrow$) $\Rightarrow$ effetto moltiplicativo

Risultato empirico

Nei magazzini Amazon con robot, la produttività per m² è aumentata del 25% e il costo per unità spedita è calato. Il modello prevede che entro il 2030 una parte significativa delle operazioni di picking sarà automatizzata.

Domanda: lo stesso ragionamento vale per le PMI logistiche emiliane? Perché sì o no?

Esercizio: Statica comparata

Un'impresa usa tecnologia $Q = L^{0.5}K^{0.5}$, con $w = 20$ e $r = 20$.

1. Trova il rapporto ottimo K/L.
2. Cosa noti di speciale? (Considera la simmetria dei parametri.)
3. Ora r scende a 10 grazie a un sussidio pubblico agli investimenti. Nuovo K/L?
4. Il costo minimo per produrre $Q = 100$ aumenta o diminuisce?

Soluzione

$$\frac{K}{L} = \frac{0.5}{0.5} \cdot \frac{20}{20} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = L$$

Caso simmetrico: con $\alpha = \beta$ e $w = r$, l'impresa usa uguali quantità di lavoro e capitale.

Con $r = 10$:

$$\frac{K}{L} = 1 \cdot \frac{20}{10} = 2 \quad \Rightarrow \quad K = 2L$$

Il sussidio rende il capitale due volte più conveniente $\Rightarrow$ l'impresa diventa capital-intensive.

Per $Q = 100$: $100 = L^{0.5}K^{0.5} = L^{0.5}(2L)^{0.5} = \sqrt{2} \cdot L \Rightarrow L^* = 100/\sqrt{2} \approx 70.7$, $K^* \approx 141.4$.

$$C^* = 20 \cdot 70.7 + 10 \cdot 141.4 = 1414 + 1414 = 2828$$

Senza sussidio ($r = 20$): $C^*_{\text{old}} = 20 \cdot 100 + 20 \cdot 100 = 4000$. Il sussidio **riduce il costo minimo**.

Esempio: Transizione energetica e scelta K/L

Contesto: la politica climatica europea aumenta il costo dell'energia tradizionale e fornisce sussidi per investimenti in efficienza energetica e rinnovabili (es. Industria 5.0, PNRR).

Effetti sul problema di minimizzazione:

- L'energia entra come terzo fattore (E), ma possiamo pensarla come parte di K
- Sussidi agli investimenti verdi $\Rightarrow r_{\text{verde}} \downarrow$
- Le imprese che adottano impianti efficienti abbassano il loro costo marginale di LP

Caso Sacmi

Il gruppo Sacmi (macchine per ceramica, packaging, beverage) ha investito in impianti a basso consumo energetico. Risultato: mentre i concorrenti vedevano aumentare MC con la crisi energetica, Sacmi ha mantenuto LAC più stabile.

Esercizio: Discussione su implicazioni di policy

Scenario: il governo introduce un salario minimo che porta w da 10 a 14 in un settore manifatturiero, con $r = 20$ invariato. La tecnologia è $Q = L^{0.7}K^{0.3}$.

1. Come cambia il rapporto K/L ottimale?
2. Quali imprese riescono ad adattarsi facilmente e quali no?
3. Il costo minimo per produrre lo stesso Q aumenta o diminuisce?
4. Un'impresa con alti FC fissi (impianti già acquistati) è più o meno esposta nel breve periodo?

Soluzione

$$\frac{K}{L}\bigg|_{w=10} = \frac{0.3}{0.7} \cdot \frac{10}{20} \approx 0.214 \qquad \frac{K}{L}\bigg|_{w=14} = \frac{0.3}{0.7} \cdot \frac{14}{20} \approx 0.300$$

Il rapporto K/L aumenta: l'impresa tende a sostituire lavoro con capitale.

Chi si adatta: imprese con tecnologia flessibile, accesso al credito per investire in automazione, settori in cui L e K sono buoni sostituti.

Chi soffre: PMI con impianti fissi, settori labour-intensive con poca sostituibilità (es. assistenza alla persona).

Il costo minimo C^* **aumenta** (un input è più caro) — ma di meno rispetto a se non ci fosse possibilità di sostituzione.

Con alti FC già sostenuti: nel BP i costi fissi sono *sunk*; l'impresa guarda solo al VC. Nel LP potrà riadattare la composizione del capitale.

Esercizio: Isocosto

Un'impresa ha $w = 15$, $r = 30$, budget $C = 300$.

1. Scrivi l'equazione dell'isocosto in forma $K = \dots$
2. Intercette e pendenza.
3. Se il budget sale a $C = 450$ (a parità di prezzi), come si sposta l'isocosto?
4. Se invece r scende a 15 (a parità di $C = 300$ e $w = 15$), come cambia?

Soluzione

$$300 = 15L + 30K \quad \Rightarrow \quad K = 10 - \frac{1}{2}L$$

Intercette: K-int $= 10$; L-int $= 20$. Pendenza $= -1/2$.

$C = 450$: $K = 15 - \frac{1}{2}L$. **Traslazione parallela verso l'esterno** (stessa pendenza, intercette più alte: $K = 15$, $L = 30$).

$r = 15$: $K = \frac{300}{15} - \frac{15}{15}L = 20 - L$. **Rotazione**: intercetta su K sale a 20, pendenza diventa -1 (più ripida — L e K ora hanno lo stesso prezzo).

Esercizio: Condizione di ottimo

Un'impresa si trova in un punto sull'isoquanto con:

$$MPL = 12, \quad MPK = 6, \quad w = 30, \quad r = 20$$

1. Verifica se siamo all'ottimo usando la condizione $MRTS = w/r$.
2. Verifica equivalentemente con MPL/w vs MPK/r.
3. Indica la direzione di aggiustamento.
4. Cosa ci aspettiamo che accada a MPL e MPK mentre l'impresa si sposta verso l'ottimo?

Soluzione

$$MRTS = \frac{12}{6} = 2 \qquad \frac{w}{r} = \frac{30}{20} = 1.5$$

$MRTS = 2 > 1.5 = w/r$: non siamo all'ottimo.
Equivalentemente:

$$\frac{MPL}{w} = \frac{12}{30} = 0.4 \quad > \quad \frac{MPK}{r} = \frac{6}{20} = 0.3$$

$MPL/w = 0.4 > MPK/r = 0.3$: il lavoro rende di più per euro. Conviene **aumentare L e ridurre K**.

Spostandosi verso più L e meno K: MPL scende (rendimenti decrescenti), MPK sale. Si converge all'ottimo dove $MRTS = w/r = 1.5$.

Esercizio: Minimizzazione completa

Tecnologia: $Q = 2L^{0.5}K^{0.5}$. Prezzi: $w = 8$, $r = 2$. Target: $Q = 40$.

1. Trova K/L ottimale.
2. Ricava L^* e K^*.
3. Calcola C^*.
4. Commenta il mix (L^*, K^*): è labour-intensive o capital-intensive?

Soluzione

$$MRTS = \frac{MPL}{MPK} = \frac{0.5 \cdot 2L^{-0.5}K^{0.5}}{0.5 \cdot 2L^{0.5}K^{-0.5}} = \frac{K}{L}$$

Condizione ottimo:

$$\frac{K}{L} = \frac{w}{r} = \frac{8}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad K = 4L$$

Vincolo ($\alpha + \beta = 1$):

$$40 = 2L^{0.5}(4L)^{0.5} = 2L^{0.5} \cdot 2L^{0.5} = 4L \quad \Rightarrow \quad L^* = 10, \quad K^* = 40$$

$$C^* = 8 \cdot 10 + 2 \cdot 40 = 80 + 80 = 160$$

Capital-intensive: $K^* = 40 \gg L^* = 10$ perché il capitale costa molto meno ($r = 2 \ll w = 8$). L'impresa sostituisce quasi completamente il lavoro.

Esercizio: Statica comparata

Partendo dall'esercizio precedente ($Q = 2L^{0.5}K^{0.5}$, $w = 8$, $r = 2$, $Q = 40$):

1. Se w scende a 2 (stesso r), come cambia K/L?
2. L'impresa diventa più labour-intensive o capital-intensive?
3. Calcola il nuovo costo minimo C^{**}.
4. Confronta C^{**} con $C^{*} = 160$: cosa noti?

Soluzione

$$\frac{K}{L} = \frac{w}{r} = \frac{2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = L$$

$$40 = 2L^{0.5}L^{0.5} = 2L \quad \Rightarrow \quad L^{**} = 20, \quad K^{**} = 20$$

$$C^{**} = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 20 = 40 + 40 = 80$$

Con $w = 2$ (uguale a r): l'impresa è perfettamente bilanciata ($K = L$), ora labour-intensive rispetto al caso precedente.
$C^{**} = 80 < C^{*} = 160$: il costo si è dimezzato. Con w molto più basso, lo stesso output costa molto meno.

Interpretazione economica

Paesi con bassi salari (alto L, basso w) tendono ad attrarre produzioni labour-intensive. Paesi con alto w investono in automazione per compensare.

Riepilogo generale

- Problema: $\min wL + rK$ s.t. $f(L, K) \geq Q$
- Isocosto: intercette e pendenza $-w/r$
- Ottimo: $MRTS = w/r$ oppure $\dfrac{MPL}{w} = \dfrac{MPK}{r}$
- Cobb–Douglas: $K/L = (\beta/\alpha)(w/r)$, poi vincolo Q
- Statica comparata: $w \uparrow \Rightarrow K/L \uparrow$

Competenze acquisite

- ✓ Costruire e leggere isocosti
- ✓ Verificare la condizione di ottimo
- ✓ Risolvere la minimizzazione Cobb–Douglas
- ✓ Fare statica comparata su w e r
- ✓ Leggere scelte aziendali (automazione, delocalizzazione) come ottimizzazione

Esercizi facoltativi per casa

1. Con $TC = 50 + Q^2$: calcola AC, AVC, MC e il Q^* ottimale.
2. Con $Q = L^{0.4}K^{0.6}$, $w = 5$, $r = 10$, $Q = 20$: trova L^*, K^*, C^*.